



جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
والتعليم الفني
الإدارة المركزية لسئون الكتب

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

الصف الثالث الإعدادي

تأليف

الأستاذ / عمر فؤاد جاب الله

الدكتور / عصام وصفي روفائيل

الأستاذ الدكتور / عفاف أبو الفتوح صالح

الأستاذ / كمال يونس كبشة

الأستاذ / سيرافيم إلياس إسكندر

مراجعة

الأستاذ / سمير محمد سعداوي

الأستاذ / فتحى أحمد شحاتة

مراجعة علمية

مستشار الرياضيات

تحرير وإخراج مركز تطوير المناهج

طبعة ٢٠٢٠ - ٢٠٢١

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفني

مقدمة الكتاب

أبناءنا الأعزاء

يسعدنا أن نقدم لكم كتاب الرياضيات للصف الثالث الإعدادى، وقد راعينا أن نجعل من دراستكم للرياضيات عملاً ممتعاً ومفيداً له تطبيقاته فى حياتكم العملية، وفى دراستكم للمواد الدراسية الأخرى، حتى تشعروا بأهمية دراسة الرياضيات وقيمتها وتقدرُوا دور علمائها، وقد اهتم هذا الكتاب بالأنشطة كعنصر أساسى، كما حاولنا تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة تساعدكم على تكوين المعرفة الرياضية، وفى نفس الوقت تساعدكم على اكتساب أساليب تفكير سليمة تدفعكم إلى الإبداع.

وقد روعى فى هذا الكتاب تقسيمه إلى وحدات دراسية وكل وحدة إلى دروس، كما وظفنا الصور والألوان لتوضيح المفاهيم الرياضية وخواص الأشكال، مع مراعاة المحصول اللغوى لكم، وما سبق أن درستموه فى الصفوف السابقة، كما راعينا فى مواطن كثيرة تدريبكم على أن تصلوا للمعلومات بأنفسكم لتنمية مهارة التعلم الذاتى لديكم، كما تم توظيف الآلة الحاسبة و الحاسب الألى كلما كان ذلك مناسباً داخل المحتوى.

وفى الجزء الخاص بالأنشطة والتدريبات :

يوجد تمارين على كل درس، وتمارين عامة على الوحدة، ونشاط خاص بالوحدة، واختبار فى نهاية كل وحدة، وفى نهاية الفصل الدراسى يوجد نماذج امتحانات تساعد على مراجعة المقرر كاملاً.

نرجو أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه الخير لكم ولمصرنا العزيزة.

المؤلفون

المحتويات

الجبر

الوحدة الأولى : المعادلات

- (١-١) حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبريًا وبيانيًا ٣
- (٢-١) حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانيًا وجبريًا..... ٨
- (٣-١) حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية..... ١١

الوحدة الثانية : الدوال الكسرية والعمليات عليها

- (١-٢) مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود ١٣
- (٢-٢) الدالة الكسرية الجبرية ١٥
- (٣-٢) تساوى كسرين جبريين ١٧
- (٤-٢) العمليات على الكسور الجبرية ٢٩

الاحتمال

الوحدة الثالثة : الاحتمال

- (١-٣) العمليات على الأحداث ٢٦
- (٢-٣) الحدث المكمل، والفرق بين حدثين ٣١

الهندسة

الوحدة الرابعة :

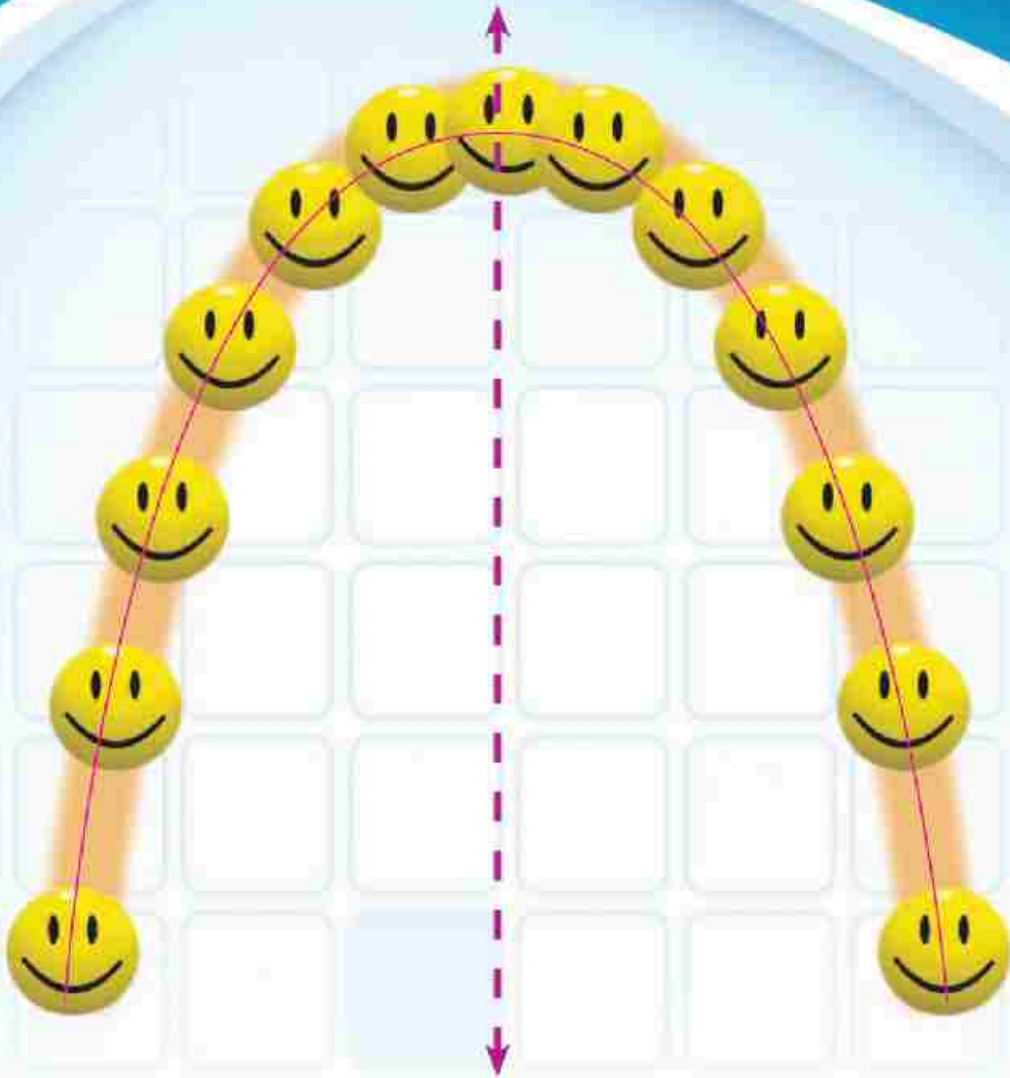
- (١-٤) تعاريف ومفاهيم أساسية ٣٥
- (٢-٤) أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة ٤٢
- (٣-٤) تعيين الدائرة ٥٥
- (٤-٤) علاقة أوتار الدائرة بمركزها ٥٣

الوحدة الخامسة : الزوايا والأقواس في الدائرة

- (١-٥) الزاوية المركزية وقياس الأقواس ٥٩
- (٢-٥) العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس ٦٦
- (٣-٥) الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس ٧٤
- (٤-٥) الشكل الرباعي الدائري ٨٠
- (٥-٥) خواص الشكل الرباعي الدائري ٨٤
- (٦-٥) العلاقة بين مماسات الدائرة ٨٨
- (٧-٥) الزاوية المماسية ٩٣

الرموز الرياضية المستخدمة

الرمز	يقرأ	الرمز	يقرأ
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية	\perp	عمودي على
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة	//	يوازي
ن	مجموعة الأعداد النسبية	\overline{ab}	القطعة المستقيمة ab
\mathbb{N}	مجموعة الأعداد غير النسبية	\overleftarrow{ab}	الشعاع ab
ع	مجموعة الأعداد الحقيقية	\overleftrightarrow{ab}	المستقيم ab
$\sqrt[n]{\quad}$	الجذر التربيعي للعدد a	$\angle (a)$	قياس زاوية a
$\sqrt[n]{\quad}$	الجذر التكعيبي للعدد a	$\widehat{(ab)}$	قياس القوس ab
[a ، b]	فترة مغلقة	~	تشابه
[a ، b[فترة مفتوحة	<	أكبر من
[a ، b]	فترة نصف مفتوحة	≤	أكبر من أو تساوى
]a ، b]	فترة نصف مفتوحة	>	أقل من
]a ، ∞[فترة غير محدودة	≥	أقل من أو تساوى
≡	تطابق	ل(a)	احتمال وقوع الحدث a
ن(a)	عدد عناصر الحدث a	\bar{x}	الوسط الحسابي
ف	فضاء العينة	σ	الانحراف العياري
		مج أو \sum	المجموع



قذف أحد اللاعبين كرة فأخذت المسار الموضح بالشكل.
هذا الشكل يمثل إحدى الدوال التي ستدرسها وتسمى بالدالة التربيعية.

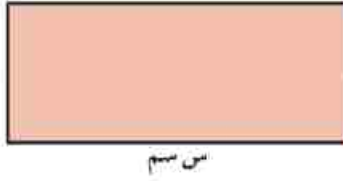
الوحدة الأولى

المعادلات

تفكر وناقش

حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين جبرياً وبيانياً

مستطيل محيطه ٣٠ سم ما هي القيم الممكنة لطوله وعرضه
 إذا كان طول المستطيل = س سم،
 عرض المستطيل = ص سم
 فإن : الطول + العرض = $\frac{1}{2}$ المحيط
 ∴ س + ص = ١٥



س سم

- تسمى هذه المعادلة معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين .
- حل هذه المعادلة يعني إيجاد زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يحقق المعادلة.

هل يمكن أن يكون (-٥، ٢٠) حلاً للمعادلة السابقة.

ترك لك عزيزي الطالب الإجابة على هذا السؤال بعد عرض الآتي :

- يمكن حل المعادلة بوضعها على إحدى الصورتين .

$$\textcircled{1} \text{ ص} = ١٥ - \text{س} \quad \text{أو} \quad \textcircled{2} \text{ س} = ١٥ - \text{ص}$$

وبإعطاء أحد المتغيرين أي قيمة يمكن حساب قيمة المتغير الآخر .
 فإذا كان س \in ح فإن مجموعة التعويض هي ح \times ح ويكون لمعادلة
 الدرجة الأولى عدد غير منته من الحلول التي كل منها على صورة زوج مرتب
 (س، ص) حيث مسقطه الأول س ومسقطه الثاني ص .

$$\text{عند س} = ٨ \quad \therefore \text{ص} = ٨ - ١٥ = -٧ \quad \therefore (٨، -٧) \text{ حل للمعادلة}$$

$$\text{عند س} = ٩,٥ \quad \therefore \text{ص} = ٩,٥ - ١٥ = -٥,٥ \quad \therefore (٩,٥، -٥,٥) \text{ حل للمعادلة}$$

$$\text{عند س} = \sqrt{٧٤} \quad \therefore \text{ص} = \sqrt{٧٤} - ١٥ \quad \therefore (\sqrt{٧٤}، \sqrt{٧٤} - ١٥) \text{ حل للمعادلة}$$

أولاً : حل معادلات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً :

أمثلة

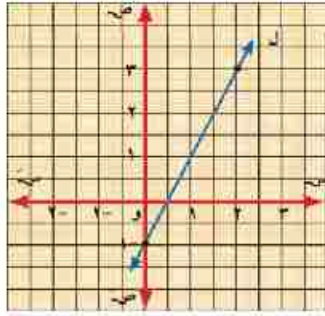
١ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢س - ص = ١

سوف تتعلم

- ☆ كيفية حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين .

مصطلحات أساسية

- ☆ معادلة من الدرجة الأولى .
- ☆ حل بياني .
- ☆ حل جبري .
- ☆ مجموعة التعويض .
- ☆ مجموعة الحل .



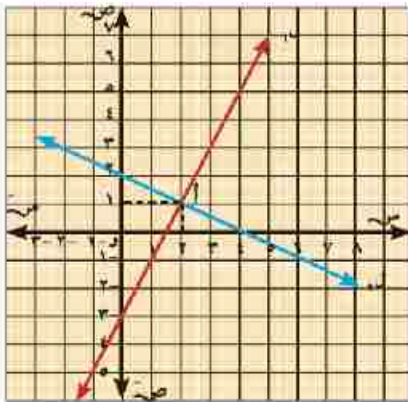
الحل

نكتب المعادلة في الصورة $ص = ٢س - ١$
 بوضع $س = ٠$ ، $ص = -١$ ، $(٠, -١)$ حل للمعادلة
 بوضع $س = ٢$ ، $ص = ٣$ ، $(٢, ٣)$ حل للمعادلة
 وبرسم المستقيم $ل$ المار بالنقطتين الممثلتين للزوجين المرتبين $(٠, -١)$ ، $(٢, ٣)$
 نجد أن كل نقطة $ل$ تمثل حلاً للمعادلة
 أي أن للمعادلة $٢س - ص = ١$ عدد غير منته من الحلول.
 اذكر أربعة حلول أخرى لهذه المعادلة.

٢ أوجد مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين بيانياً:

$$ل١ : ص = ٢س - ٣ ، ل٢ : س + ص = ٤$$

الحل



في المعادلة $ص = ٢س - ٣$
 بوضع $س = ٠$ ، $ص = -٣$ ، $(٠, -٣)$ حل للمعادلة
 بوضع $س = ٤$ ، $ص = ٥$ ، $(٤, ٥)$ حل للمعادلة
 فيكون $ل١$ في الشكل المقابل يمثل مجموعة الحل للمعادلة (١)
 نضع المعادلة $س + ص = ٤$ على الصورة $ص = ٤ - س$
 بوضع $ص = ٠$ ، $س = ٤$ ، $(٤, ٠)$ حل للمعادلة
 وبوضع $ص = ١$ ، $س = ٢$ ، $(٢, ١)$ حل للمعادلة
 فيكون $ل٢$ في الشكل المقابل تمثل مجموعة حل المعادلة (٢)
 في الشكل $ل١$ ، $ل٢$ يتقاطعان في النقطة $أ(١, ٢)$
 ، مجموعة حل المعادلتين هي $\{(١, ٢)\}$

تدريب في كراسة الرسم البياني:

أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية بيانياً:

$$١ \quad ٢س + ص = ٠ ، س + ص = ٣ \quad ٢ \quad ص = ٣س - ١ ، س - ص = ١$$



مثال ٣



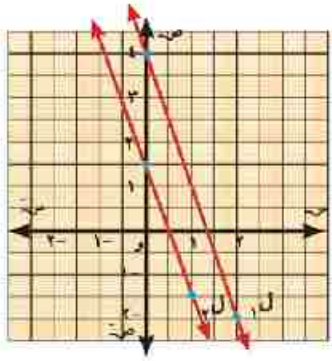
أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أولاً: $٣س + ص = ٤$ (١) ، $٢ص + ٦س = ٣$ (٢)

ثانياً: $٣س + ٢ص = ٦$ (١) ، $ص - ٣ = -\frac{٣}{٤}$ (٢)

الحل

أولاً: بوضع المعادلة (١) على الصورة $ص = ٤ - ٣س$



بوضع $س = ٠$ ، $ص = ٤$ فيكون $(٤, ٠)$ حلاً للمعادلة
 بوضع $س = ٢$ ، $ص = -٢$ فيكون $(٢, -٢)$ حلاً للمعادلة
 ويكون L_1 يمثل مجموعة حل المعادلة (١)
 بوضع المعادلة (٢) على الصورة $ص = \frac{٣-٣س}{٤}$

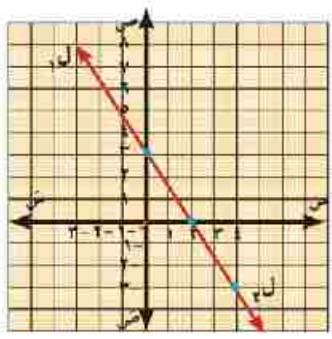
بوضع $س = ٠$ ، $ص = \frac{٣}{٤}$ فيكون $(٠, \frac{٣}{٤})$ حلاً للمعادلة
 بوضع $س = ١$ ، $ص = \frac{٣-٣}{٤} = ٠$ فيكون $(١, ٠)$ حلاً للمعادلة
 ويكون L_2 يمثل مجموعة الحل للمعادلة (٢)

$L_1 \cap L_2 = \emptyset$ ، لا يوجد حل للمعادلتين معاً.

أي أنه لا يوجد حل للمعادلتين (١)، (٢) إذا كان $L_1 // L_2$

من الهندسة التحليلية: ميل $L_1 = \frac{٣}{١} = ٣$ ، ميل $L_2 = \frac{٣-٣س}{٤} = \frac{٣}{٤}$ ، $L_1 // L_2$ ، $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

ثانياً: بوضع المعادلة (٢) على الصورة $ص = ٦ - ٣س$



أي $٣س + ٢ص = ٦$ وهي نفس المعادلة (١)

والشكل البياني الموضح يبين التمثيل البياني للمعادلتين بمستقيمين منطبقين ونقول إن للمعادلتين (١)، (٢) عدداً غير منته من الحلول وتكون مجموعة الحل هي $\{(س, ص) : ص = ٦ - ٣س\}$.



في كراسة الرسم البياني:

أوجد بيانيا مجموعة الحل لكل زوج في المعادلات الآتية :

- ① $٣س + ص = ٥$ ، $٨ = ٣س + ص$
- ② $٤ = ٢س + ص$ ، $٨ - ٢ص = ٤س$

ثانياً : حل معادلات الدرجة الأولى في متغيرين جبرياً :

يمكن حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين آتياً بالتخلص من أحد المتغيرين، فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في متغير واحد، وبحلها نحصل على قيمة هذا المتغير، ثم بالتعويض في إحدى المعادلتين نحصل على قيمة المتغير الذي سبق التخلص منه .

مثال ٤

أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ص} = 3 & (1) \\ \text{س} + 2\text{ص} = 4 & (2) \end{cases}$$

الحل - (طريقة التعويض)

من المعادلة (١) $\text{ص} = 3 - \text{س}$

بالتعويض في المعادلة (٢) عن ص

$$\begin{aligned} \text{فيكون: } \text{س} + 2(3 - \text{س}) &= 4 \\ \text{بالتعويض في المعادلة (١)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{س} + 6 - 2\text{س} &= 4 & \text{س} &= 2 \\ \text{س} &= 2 & \text{ص} &= 1 \end{aligned}$$

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = $\{(2, 1)\}$

حل اخر - (طريقة الحذف)

ويتم حذف أحد المتغيرين من المعادلتين (بالجمع، أو الطرح) للحصول على معادلة ثالثة في متغير واحد وبحل المعادلة الناتجة نوجد قيمة هذا المتغير.

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ص} = 3 & (1) \\ \text{س} + 2\text{ص} = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\text{بضرب طرفي المعادلة (١) } \times 2 \text{ ∴ } \text{س} - 2\text{ص} = 6 & (3)$$

$$\begin{aligned} \text{من (٢)، (٣) بالجمع} \\ \text{بالتعويض في (١)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{س} + 2\text{ص} &= 4 & \text{س} - 2\text{ص} &= 6 \\ \text{س} &= 1 & \text{ص} &= 3 \end{aligned}$$

∴ مجموعة الحل المشتركة للمعادلتين = $\{(1, 3)\}$

أجب عن الأسئلة الآتية في كراسة الفصل:



١ أوجد جبرياً مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية :

أ $\begin{cases} \text{س} + 4\text{ص} = 24 \\ \text{س} - 2\text{ص} = 2 \end{cases}$ ،

ب $\begin{cases} \text{س} + 3\text{ص} = 4 \\ \text{س} - 3\text{ص} = 5 \end{cases}$ ،

٢ ما عدد حلول كل زوج في المعادلات الآتية :

أ $\begin{cases} \text{س} + 7\text{ص} = 6 \\ \text{س} - 2\text{ص} = 14 \end{cases}$ ،

ب $\begin{cases} \text{س} + 9\text{ص} = 24 \\ \text{س} + 2\text{ص} = 8 \end{cases}$ ،

ج $\begin{cases} \text{س} + 4\text{ص} = -4 \\ \text{س} - 2\text{ص} = 15 \end{cases}$ ،



مثال 5



أوجد قيمتي أ، ب علما بأن (٣، ١) حل للمعادلتين.
أ س + ب ص - ٥ = ٠ ، ٣ أ س + ب ص = ١٧

الحل

∴ حل للمعادلتين (٣، ١)
∴ حل للمعادلة أ س + ب ص - ٥ = ٠
∴ ٣ - أ ب - ٥ = ٠ أي أن ٣ - أ ب = ٥ (١)
∴ حل للمعادلة أ س + ب ص = ١٧ ،
∴ ٩ - أ ب = ١٧ (٢)
ب طرح طرفي المعادلة (١) من طرفي المعادلة (٢) ينتج أن :

$$١٢ = ١٦ \quad \therefore ٢ = ١$$

بالتعويض في المعادلة (١)

$$٥ = ب - ٢ \times ٣ \quad \therefore ب = ١$$

مثال 6



عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١، وإذا عكس (بَدَّل) وضع الرقمين، فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلي بمقدار ٢٧ ما هو العدد الأصلي؟

الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س، رقم العشرات = ص

$$\therefore س + ص = ١١ \quad \dots (١)$$

رقم الآحاد	رقم العشرات	قيمة العدد
س	ص	س + ١٠ ص
ص	س	ص + ١٠ س

العدد الناتج من تبديل وضع رقمية - العدد الأصلي = ٢٧

$$\therefore (ص + ١٠ س) - (س + ١٠ ص) = ٢٧$$

$$\therefore ٩ س - ٩ ص = ٢٧ \quad \text{وبالتقسمة على ٩} \quad \therefore س - ص = ٣ \quad \dots (٢)$$

بجمع المعادلتين (١)، (٢)

$$\therefore ٢ س = ١٤ \quad \therefore س = ٧$$

$$\therefore ٧ + ص = ١١ \quad \therefore ص = ٤$$

وبالتعويض في المعادلة (١) ∴

$$\therefore \text{العدد هو } ٤٧$$



حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً وجبرياً

لاحظ المثال التالي :

سبق أن مثلنا بيانياً الدالة التربيعية d حيث :

$$d(s) = اس^2 + بس + ج ، ا \neq 0 ، ج \in \mathbb{R}$$

والمعادلة المناظرة لها هي $d(s) = 0$ أي $اس^2 + بس + ج = 0$

وقد سبق لك حل هذه المعادلة بالتحليل.

$$\text{ولحل المعادلة : } اس^2 - ٤س + ٣ = 0$$

نحلل الطرف الأيمن للمعادلة فتأخذ الصورة :

$$0 = (س - ٣) (س - ١)$$

$$\therefore س - ٣ = 0 \quad \text{أو} \quad س - ١ = 0$$

$$\therefore س = ٣ \quad \text{أو} \quad س = ١$$

\therefore مجموعة الحل هي $\{ ١ ، ٣ \}$

أولاً : الحل البياني

لحل المعادلة $اس^2 + بس + ج = 0$ بيانياً نتبع الآتي :

- نرسم منحنى الدالة d حيث $d(s) = اس^2 + بس + ج$ حيث $ا \neq 0$
- نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات، فتكون هي مجموعة حل المعادلة.

مثال ١

ارسم الشكل البياني للدالة d حيث $d(s) = اس^2 - ٤س + ٣$ في الفترة $[-١ ، ٥]$

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة : $اس^2 - ٤س + ٣ = 0$

سوف تتعلم

☆ كيفية حل معادلة من

الدرجة الثانية في مجهول

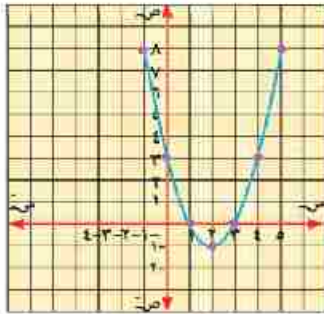
واحد بيانياً وجبرياً.

مصطلحات أساسية

☆ حل بياني.

☆ حل جبري.

☆ مجموعة الحل.



الحل

نعين بعض الأزواج المرتبة (س، ص) التي تنتمي لبيان الدالة د، والتي

مسقطها الأول س $\in [0, 1]$

$$د(1) = 8, \quad د(0) = 3, \quad د(1) = 0$$

$$د(2) = -1, \quad د(3) = 0, \quad د(4) = 3, \quad د(5) = 8$$

نضع هذه الأزواج المرتبة في جدول كالآتي:

س	0	1	2	3	4	5
ص = د(س)	3	0	-1	0	3	8

نعين على المستوى الإحداثي النقط التي تمثل هذه الأزواج المرتبة، ثم نرسم منحنياً ممهداً يمر بهذه النقط.

من الرسم نجد أن منحنى الدالة د يقطع محور السينات في النقطتين (0، 3)، (1، 0)

يسمى العددان 3، 1 بجذري المعادلة $س^2 - 4س + 3 = 0$

وتكون مجموعة حل المعادلة هي {3، 1}

في كراسة الرسم البياني أجب عن السؤالين التاليين:



1 ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $س^2 + 2س + 1$ في الفترة $[-4, 2]$ ومن الرسم أوجد مجموعة

$$\text{حل المعادلة: } س^2 + 2س + 1 = 0$$

2 ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $س^2 + 6س - 11$ في الفترة $[0, 6]$ ومن الرسم أوجد مجموعة

$$\text{حل المعادلة: } س^2 + 6س - 11 = 0$$

ثانياً: الحل الجبري باستخدام القانون العام:



حل المعادلة: $س^2 - 6س + 7 = 0$ مستعيناً بفكرة إكمال المربع.

$$\text{الحل} \quad \therefore س^2 - 6س + 9 + 9 - 7 = 0$$

$$\therefore (س - 3)^2 - 2 = 0 \quad \leftarrow \quad (س - 3)^2 = 2$$

$$س - 3 = \sqrt{2} \quad \text{أ.} \quad 3 - \sqrt{2} = س$$

$$س = 3 + \sqrt{2} \quad \text{أ.} \quad 3 + \sqrt{2} = س$$

$$\therefore س = 3 \pm \sqrt{2}$$

يمكن حل معادلة الدرجة الثانية: $اس^2 + بس + ج = ٠$ حيث $ا، ب، ج \neq ٠$ باستخدام القانون العام.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤اج}}{٢ا} \quad \text{حيث } ا \neq ٠, ا، ب، ج \neq ٠$$



أوجد مجموعة حل المعادلة $س^3 - ٥س = ١$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore ٣س^3 - ٥س = ١ & \quad \therefore ٣س^3 - ٥س + ١ = ٠ \\ \therefore ٣ = ا, ٥ = ب, ١ = ج & \quad \therefore ٣س^3 - ٥س + ١ = ٠ \\ \therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤اج}}{٢ا} = \frac{-٥ \pm \sqrt{٥^2 - ١٢}}{٦} & \quad \therefore ٣س^3 - ٥س + ١ = ٠ \\ \text{إما } س = \frac{٣,٦١ + ٥}{٦} = ١,٤٤ & \quad \text{أ، } س = \frac{٣,٦١ - ٥}{٦} = ٠,٢٣ \\ \therefore \text{مجموعة الحل هي: } \{٠,٢٣, ١, ٤٤\} & \end{aligned}$$



في إحدى مسابقات رمي القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة: $ص = ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣$ حيث $س$ تمثل المسافة الأفقية بالمتر، $ص$ تمثل ارتفاع القرص عن سطح الأرض. أوجد المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص بدءًا من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

الحل

$$\begin{aligned} \therefore ٠ = ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ & \quad \therefore ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ = ٠ \\ \therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤اج}}{٢ا} = \frac{-٤,٩ \pm \sqrt{٤,٩^2 - ١٣ \times (٠,٠٤٣)}}{٢ \times (٠,٠٤٣)} & \quad \therefore ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ = ٠ \\ \therefore س = \frac{-٤,٩ \pm \sqrt{٢٦,٤١ - ١,٢٣}}{٠,٠٨٦} = \frac{-٤,٩ \pm ٥,١٢٣}{٠,٠٨٦} & \quad \therefore ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ = ٠ \\ \text{إما } س = \frac{-٤,٩ + ٥,١٢٣}{٠,٠٨٦} = ٢,٥٩ \text{ (مرفوض) لماذا؟} & \quad \therefore ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ = ٠ \\ \text{أ، } س = \frac{-٤,٩ - ٥,١٢٣}{٠,٠٨٦} = -١١٦,٥٤٦٥١١٦ \text{ متر} & \quad \therefore ٠,٠٤٣س^2 + ٤,٩س + ١٣ = ٠ \\ \therefore \text{المسافة الأفقية التي يسقط عندها القرص } ١١٦,٥٥ \text{ متر.} & \end{aligned}$$

حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

تمهيد:

نعلم أن المعادلة $٢س - ص = ٣$ هي معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين، بينما المعادلات: $س^٢ + ص = ٥$ ، $س = ٢$ هي معادلات من الدرجة الثانية في متغيرين لماذا؟ وسوف نقوم بحل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية، ويعتمد الحل على طريقة التعويض كما سيتضح من الأمثلة التالية.

حساب ذهني: إذا كان: $س + ص = ١٠$ ، $س^٢ - ص^٢ = ٤٠$ فأوجد $س - ص$.



أوجد جبرياً مجموعة الحل للمعادلتين:

$$ص + ٢س + ١ = ٠، \quad ٤س^٢ + ص^٢ - ٣س - ١ = ٠$$

الحل

من المعادلة الأولى: $ص = -(٢س + ١)$ وبالتعويض في المعادلة الثانية.

$$٠ = ٤س^٢ + [-(٢س + ١)]^٢ - ٣س - ١$$

$$٠ = ٤س^٢ + ٤س^٢ + ٤س + ١ - ٣س - ١$$

$$٠ = ٨س^٢ + ٤س$$

$$٠ = ٤س(٢س + ١) \quad \therefore ٠ = ٢س + ١ \quad \therefore ٢س = -١$$

وبالتعويض عن قيم $س$ في المعادلة الأولى:

$$٠ = ٢س + ١ \quad \therefore ٢س = -١ \quad \therefore ٢س + ١ = ٠$$

$$٠ = ٢س + ١ \quad \therefore ٢س = -١ \quad \therefore ٢س + ١ = ٠$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل هي: } \{(٠, -\frac{١}{٢}), (-١, ٠)\}$$

سوف نتعلم

☆ كيفية حل معادلتين في

متغيرين إحداهما من

الدرجة الأولى والأخرى

من الدرجة الثانية.

مصطلحات أساسية

☆ معادلة من الدرجة الأولى.

☆ معادلة من الدرجة الثانية.

☆ مجموعة الحل.

٢ مستطيل محيطه ١٤ سم، ومساحته ١٢ سم^٢. أوجد كلاً من بعديه.

الحل

نفرض أن بعدي المستطيل س، ص

∴ محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض) ∴ ١٤ = ٢ (س + ص) ويقسمه الطرفين على ٢

∴ س + ص = ٧ أي أن ص = ٧ - س

∴ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ ١٢ = س × ص

وبالتعويض من المعادلة (١) في المعادلة (٢):

∴ س (٧ - س) = ١٢

∴ س^٢ - ٧س + ١٢ = ٠

∴ س = ٣ أو س = ٤

عندما: س = ٣ ∴ ص = ٧ - ٣ = ٤

عندما: س = ٤ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣ ∴ بعدا المستطيل هما ٣ سم، ٤ سم.

٣ عدد مكون من رقمين رقم أحاده ضعف رقم عشراته، إذا كان حاصل ضرب

الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي. فما هو العدد؟

الحل

نفرض أن رقم الأحاد = س، رقم العشرات = ص

∴ العدد الأصلي = س + ١٠ ص

∴ رقم الأحاد ضعف رقم العشرات

∴ س = ٢ ص ← (١)

∴ حاصل ضرب الرقمين = $\frac{1}{3}$ العدد الأصلي

∴ س ص = $\frac{1}{3}$ (س + ١٠ ص) ← (٢) بحل (١)، (٢) معاً

∴ ٢ ص = $\frac{1}{3}$ (٢ ص + ١٠ ص)

∴ ٢ ص = ٦ ص ∴ ٠ = (٣ - ص) ص

∴ ص = ٣، ص = ٠ (مرفوض) بالتعويض في المعادلة (١)

∴ س = ٦ ∴ العدد المطلوب = ٣٦

الوحدة الثانية الدوال الكسرية والعمليات عليها

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود



سوف نتعلم

- ☆ كيفية إيجاد مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة كثيرة الحدود.
- ☆ مجموعة أصفار الدالة.

فكر وناقش

إذا كانت د: ح ← ح حيث د(س) = $س^3 - ٣س^٢ + ٢س$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة في س أوجد: د(٠)، د(١)، د(٢) ماذا تلاحظ؟
نلاحظ أن: د(٠) = ٠، د(١) = ٠، د(٢) = ٠.
 لذا يسمى: ٠، ١، ٢ أصفاراً للدالة د.

إذا كانت د: ح ← ح كثيرة حدود في س فإن مجموعة وبصفة عامة قيم س التي تجعل د(س) = ٠ تسمى مجموعة أصفار الدالة د، ويرمز لها بالرمز ص(د).

أي أن: ص(د) هي مجموعة حلّ المعادلة د(س) = ٠ وعموماً للحصول على أصفار الدالة د نضع د(س) = ٠ ونحلّ المعادلة الناتجة لإيجاد مجموعة قيم س.

أرسلنا



أوجد ص(د) لكل من دوال كثيرات الحدود الآتية:

- ١ د(س) = $٢س - ٤$
- ٢ د(س) = $٢س - ٩$
- ٣ د(س) = ٥
- ٤ د(س) = ٠
- ٥ د(س) = $٢س + ٤$
- ٦ د(س) = $٦س - ٣٢$
- ٧ د(س) = $٢س + ١$

الحل

- ١ د(س) = $٢س - ٤$ بوضع د(س) = صفر $\therefore ٢س - ٤ = ٠$
 أي $٢س = ٤$ $\therefore س = ٢$
- ٢ د(س) = $٢س - ٩$ بوضع د(س) = صفر $\therefore ٢س - ٩ = ٠$
 أي $٢س = ٩$ $\therefore س = \frac{٩}{٢}$

٢ د_٢(س) = س^٢ - ٩

بوضع د_٢(س) = صفر \therefore س^٢ - ٩ = ٠

أى س^٢ = ٩ \therefore س = ٣ ±

\therefore ص(د_٢) = {-٣، ٣}

٣ \therefore د_٢(س) = ٥

\therefore لا يوجد أى عدد حقيقي يجعل د_٢(س) = ٠

\therefore ص(د_٢) هو ϕ

٤ \therefore د_٤(س) = ٠

\therefore جميع الأعداد الحقيقية تكون أصفاراً لهذه الدالة

\therefore ص(د_٤) = ح

٥ بوضع س^٢ + ٤ = ٠

\therefore ص(د_٥) هو ϕ

\therefore س = $\pm \sqrt{-٤}$ \notin ح

\therefore س^٢ = -٤

٦ بوضع س^٦ - ٣٢ = ٠

\therefore س = ٠ ، س^٥ = ٣٢

\therefore س(س^٥ - ٣٢) = ٠

\therefore ص(د_٦) = {٠، ٣٢}

\therefore س = ٢

وعندما س^٥ = ٣٢

٧ بوضع س^٢ + س + ١ = صفر

حيث يتعذر علينا تحليل المقدار س^٢ + س + ١ لذلك نلجأ إلى استخدام القانون لحل المعادلة التربيعية

حيث أ = ١ ، ب = ١ ، ج = ١

فيكون س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤}}{٢}$

\therefore س = $\frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢}$ \notin ح

\therefore لا توجد حلول حقيقية لهذه المعادلة ويكون ص(د_٧) = ϕ



١ أوجد مجموعة أصفار الدوال الآتية:

أ د(س) = س^٣ - ٤س^٢ ب د(س) = س^٣ - ٢س + ١ ج د(س) = س^٢ - ٢س - ١

د د(س) = س^٤ - س^٢ هـ د(س) = س^٢ - س + ١ و د(س) = س^٢ - ٢



الدالة الكسرية الجبرية

فكر وناقش



سوف نتعلم

☆ مفهوم الدالة الكسرية الجبرية.

مصطلحات أساسية

- ☆ دالة كثيرة الحدود.
- ☆ مجال الكسر الجبري.
- ☆ مجال مشترك لكسرين جبريين.

سبق أن درست العدد النسبي الذي على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث $أ$ ، $ب \neq 0$ ، $ب \in \mathbb{Z}$ ، $ب \neq 0$ ،
فإذا كانت $ق : ح \leftarrow ح$ ، $ق(س) = س + ٣$ ،
 $د : ح \leftarrow ح$ ، $د(س) = س^٢ - ٤$.
١ اوجد مجال $ق$ ، $د$.

٢ إذا كان $ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$ هل تستطيع إيجاد مجال $ن$ متى علم مجال كل من $ق$ ، $د$ ؟

مما سبق نستنتج الآتي:

ن تسمى دالة كسرية جبرية أو كسرًا جبريًا حيث $ن(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٤}$ ويكون مجال $ن$ في هذه الحالة هو ح عدا قيم $س$ التي تجعل الكسر غير معرف (مجموعة أصفار المقام).
أي أن: مجال $ن$ هو ح - {٢، -٢}

إذا كان $ق$ ، $د$ كثيرتي حدود، وكان $ص(د)$ هي مجموعة أصفار $د$ فإن الدالة $ن$ حيث:

$$ن : ح - ص(د) \leftarrow ح ، ن(س) = \frac{ق(س)}{د(س)}$$

تسمى دالة كسرية جبرية حقيقية واختصارًا تسمى كسرًا جبريًا.

لائحة أن: مجال الدالة الكسرية الجبرية = ح - مجموعة أصفار المقام.

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر :

المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون فيها هذه الكسور معرفة معاً (في آن واحد) .



مثال

إذا كان n_1 ، n_2 كسرين جبريين حيث:

$$n_1 = \frac{1}{s-1} ، n_2 = \frac{3}{s-2}$$

فاوجد المجال المشترك لكل من n_1 ، n_2

الحل

بفرض أن M_1 مجال n_1 ، M_2 مجال n_2 .

∴ $M_1 = \{s \mid s \neq 1\}$ ، $M_2 = \{s \mid s \neq 2\}$ ويكون المجال المشترك للكسرين n_1 ، $n_2 = M_1 \cap M_2$

حيث: $M_1 \cap M_2 = \{s \mid s \neq 1\} \cap \{s \mid s \neq 2\}$

$$= \{s \mid s \neq 1, 2\}$$

يلاحظ أنه لأي قيمة للمتغير s تنتمي إلى المجال المشترك يكون كل من n_1 ، n_2 (س) معرفة (له وجود)

وعموماً

إذا كان n_1 ، n_2 كسرين جبريين وكان:

مجال $n_1 = \{s \mid s \neq 1\}$ مجموعة أصفار مقام n_1)

مجال $n_2 = \{s \mid s \neq 2\}$ مجموعة أصفار مقام n_2)

فإن: المجال المشترك للكسرين n_1 ، $n_2 = \{s \mid s \neq 1, 2\}$

= ح - مجموعة أصفار مقامى الكسرين .

ويكون المجال المشترك لعدد من الكسور الجبرية

= ح - مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور .



تساوي كسرين جبريين



سوف تتعلم

- ☆ مفهوم تساوي كسرين جبريين.
- ☆ كيفية تحديد متى يتساوى كسران جبريان.

مصطلحات أساسية

- ☆ اختزال الكسر الجبري.
- ☆ تساوي كسرين جبريين.

اختزال الكسر الجبري

فكر وناقش

إذا كان ن كسرًا جبريًا حيث: $n = \frac{س^2 + س}{س - 1}$ فإن:

- 1 مجال ن = ح - {1، 0}
- 2 العامل المشترك بين البسط والمقام بعد تحليل كل منهما تحليلًا كاملاً هو $س + 1 \neq 0$ صفر حيث س لا تأخذ القيمة 1، 0
- 3 الكسر الجبري في أبسط صورة بعد حذف العامل المشترك = $\frac{س}{س - 1}$
- 4 هل يتغير مجال الكسر الجبري ن بعد وضعه في أبسط صورة؟

مما سبق نستنتج أن:

- وضع الكسر الجبري في أبسط صورة يسمى باختزال الكسر الجبري.
- وعند اختزال الكسر الجبري نتبع الخطوات الآتية:
- 1 نحلل بسط ومقام الكسر الجبري تحليلًا كاملاً.
 - 2 نعين مجال الكسر الجبري قبل حذف العوامل المشتركة في البسط والمقام.
 - 3 نحذف العوامل المشتركة في كل من البسط والمقام للحصول على أبسط صورة.

تعريف: يقال إن: الكسر الجبري ن في أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه.

مثال ١

إذا كان $\frac{س^٣ + س^٢ - ٦س}{س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦} = (س)$ اختصر $(س)$ إلى أبسط صورة مبيّنًا مجال $ن$.

الحل

$$\therefore \frac{س^٣ + س^٢ - ٦س}{س^٤ - ١٣س^٢ + ٣٦} = (س) \Rightarrow \frac{س(س^٢ + س - ٦)}{(س^٢ - ٩)(س^٢ - ٤)} = (س)$$

\therefore مجال $ن(س) = ح - \{٣، ٢، ٢-، ٣-\}$.

اختزل $(س + ٣)$ ، $(س - ٢)$ من البسط والمقام.

$$\therefore \frac{س}{(س + ٣)(س - ٢)}$$

تساوى كسرين جبريين

فكر وناقش

اوجد في أبسط صورة كلا من $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ مبيّنًا المجال لكل منهما في كل مما يأتي:

$$١ \quad ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩} \quad ، \quad ن_٢(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٦}$$

$$٢ \quad ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٢ + ٤} \quad ، \quad ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٢ + ٤س + ٤}$$

هل $ن_١ = ن_٢$ في كل حالة؟ وضع أجابتك.

للحظة مما سبق أن:

$$١ \quad ن_١(س) = \frac{س + ٣}{(س + ٣)(س - ٣)} = \frac{١}{س - ٣} \quad \text{ومجال } ن_١ = ح - \{٣، ٣-\}$$

$$ن_٢(س) = \frac{١}{٣(س - ٣)} = \frac{١}{٣(س - ٣)} \quad \text{ومجال } ن_٢ = ح - \{٣-\}$$

أى أن: $ن_١ \neq ن_٢$ ، $ن_١$ اختزل إلى نفس الكسر، ولكن مجال $ن_١ \neq$ مجال $ن_٢$

$$٢ \quad ن_١(س) = \frac{س^٢}{٣(س + ٢)} = \frac{س}{٣(س + ٢)} \quad \text{ومجال } ن_١ = ح - \{٢-\}$$

$$ن_٢(س) = \frac{س(س + ٢)}{٢(س + ٢)} = \frac{س}{٢} \quad \text{ومجال } ن_٢ = ح - \{٢-\}$$

أى أن: $ن_١ \neq ن_٢$ ، $ن_٢$ اختزل إلى نفس الصورة، مجال $ن_١ =$ مجال $ن_٢$

مما سبق نستنتج أن:

يقال إن الدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ متساويتان (أى: $ن_١ = ن_٢$) إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

مجال $ن_١ =$ مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لكل $س \in$ المجال المشترك.



أمثلة

٢ إذا كانت $n_1 = (س)$ ، $\frac{س^2}{س^3 - س^2} = n_2$ ، $\frac{س^2 + س^3 + س^4}{س^3 - س^4} = n_3$ أثبت أن : $n_1 = n_2 = n_3$

الحل

$$\therefore n_1 = (س) \quad \therefore n_2 = \frac{س^2}{س^3 - س^2} = \frac{س^2}{س^2(س - 1)} = \frac{1}{س - 1}$$

ومجال $n_1 = ح - \{1, 0\}$

$$\therefore n_3 = (س) = \frac{س(س^2 + س^3 + س^4)}{س(س^3 - س^4)} = \frac{س(1 + س + س^2)}{س(س - 1)(س + 1)} = \frac{1}{س - 1}$$

$$\therefore n_3 = (س) = \frac{1}{س - 1}$$

ومجال $n_3 = ح - \{1, 0\}$

من ١ ، ٢

\therefore مجال $n_1 =$ مجال $n_2 =$ مجال $n_3 = (س)$ لكل $س \in ح - \{1, 0\}$ ، $n_1 = n_2 = n_3$

$$\text{٣ إذا كان } n_1 = (س) \text{ ، } \frac{س^2 + س^3 - س^4}{س^2 + س^3 - س^6} = n_2 \text{ ، } \frac{س^2 - س^3 - س^6}{س^3 - س^9} = n_3$$

فأثبت أن $n_1 = (س) = n_2 = n_3$ لجميع قيم $س$ التي تنتمي إلى المجال المشترك، وأوجد هذا المجال .

الحل

$$\therefore n_1 = (س) = \frac{س^2 + س^3 - س^4}{س^2 + س^3 - س^6} = \frac{س^2(س - 1)(س + 1)}{س^2(س - 1)(س + 1)(س - 1)(س + 1)} = \frac{1}{س - 1}$$

ومجال $n_1 = ح - \{1, 0\}$

$$\therefore n_2 = (س) = \frac{س^2 - س^3 - س^6}{س^3 - س^9} = \frac{س^2(س - 1)(س + 1)}{س^3(س - 1)(س + 1)(س - 1)(س + 1)} = \frac{1}{س - 1}$$

ومجال $n_2 = ح - \{1, 0, 3\}$

من ١ ، ٢

نلاحظ: $n_1 = (س)$ ، $n_2 = (س)$ اختزلا إلى نفس الكسر $\frac{س^2 + س^3}{س^2 + س^3}$

إلا أن مجال $n_1 \neq$ مجال n_2 لذلك $n_1 \neq n_2$

ونستطيع أن نقول إن: $n_1 = (س) = n_2 = (س)$ يأخذان نفس القيم إذا كانت $س$ تنتمي إلى المجال المشترك

للدالتين n_1 ، n_2 وهو $ح - \{1, 0, 3\}$.

العمليات على الكسور الجبرية

أولاً : جمع و طرح الكسور الجبرية :

فكر و ناقش

١ إذا كانت $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad , \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

٢ إذا كان $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{d}$ عددين نسبيين فأوجد كلاً من :

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{d} \quad , \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{d}$$

مما سبق يمكننا إجراء عملية جمع أو طرح كسرين جبريين متحدى أو مختلفي المقام كالآتي :

إذا كان $s \in \mathbb{R}$ المجال المشترك للكسرين الجبريين $\frac{1}{n_1}$ ، $\frac{1}{n_2}$ حيث :

$$\frac{1}{n_1} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} \quad , \quad \frac{1}{n_2} = \frac{d_2(s)}{n_2(s)}$$

(كسرين جبريين متحدى المقام)

$$\text{فإن: } \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} + \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot n_2(s) + d_2(s) \cdot n_1(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

$$\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} - \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot n_2(s) - d_2(s) \cdot n_1(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

$$\frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} \cdot \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot d_2(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

(كسرين جبريين مختلفي المقام)

$$\text{فإن: } \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} + \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot n_2(s) + d_2(s) \cdot n_1(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

$$\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} - \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot n_2(s) - d_2(s) \cdot n_1(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

$$\frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} \cdot \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot d_2(s)}{n_1(s) \cdot n_2(s)}$$

$$\frac{1}{n_1} \div \frac{1}{n_2} = \frac{d_1(s)}{n_1(s)} \div \frac{d_2(s)}{n_2(s)} = \frac{d_1(s) \cdot n_2(s)}{d_2(s) \cdot n_1(s)}$$

سوف تتعلم

☆ كيفية إجراء العمليات

$$(+, -, \times, \div)$$

على الكسور الجبرية

مصطلحات أساسية

☆ معكوس جمعي للكسر

الجبري.

☆ معكوس ضربي للكسر

الجبري.

١ إذا كان $\frac{س}{س^2+٢س} = (س)_١$ ، $\frac{س+٢}{س^٢-٤س} = (س)_٢$ مبينا مجال ن.
قاعدة $(س)_١ + (س)_٢ = (س)_٣$ مبينا مجال ن.

الحل

∴ $(س)_٣ = (س)_١ + (س)_٢$
 ∴ $(س)_٣ = \frac{س}{س^2+٢س} + \frac{س+٢}{س^٢-٤س} = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)} = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)}$
 مجال ن = ح - {٢، ٠، -٢}
 ∴ $(س)_٣ = \frac{س}{س(س+٢)} + \frac{س+٢}{س(س-٢)} = \frac{١}{س+٢} + \frac{١}{س-٢}$

٢ **أوجد:** $(س)_٣$ في أبسط صورة مبيناً مجال الدالة ن حيث:

$$\frac{٦+س^٢}{٦-س+٢س} + \frac{٤-س^٣}{٦+س^٢-٥س}$$

الحل

∴ $(س)_٣ = \frac{٦+س^٢}{(٣+س)٢} + \frac{٤-س^٣}{(٣-س)(٢-س)}$
 مجال ن = ح - {٣، ٢، -٣}
 ∴ $(س)_٣ = \frac{٦+س^٢}{(٣+س)٢} + \frac{٤-س^٣}{(٣-س)(٢-س)}$
 ∴ م.م.أ للمقامات = $(س-٣)(س-٢)$ ويضرب حدى الكسر الثانى فى $(س-٣)$
 ∴ $(س)_٣ = \frac{٦+س^٢}{(٣+س)٢} + \frac{٤-س^٣}{(٣-س)(٢-س)} = \frac{٦+س^٢}{(٣+س)٢} + \frac{٤-س^٣}{(٣-س)(٢-س)}$

$$\frac{٥}{٣-س} = \frac{(٢-س)٥}{(٣-س)(٢-س)} = \frac{١٠-٥س}{(٣-س)(٢-س)}$$



٣ اوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن حيث :

$$ن(س) = \frac{2}{س^2 - 4س} + \frac{12}{س^3 - 2س^2} ، ثم أوجد ن(٠) ، ن(١-) إن أمكن ذلك .$$

العل

(الترتيب قازلي حسب قوى س)

$$\therefore ن(س) = \frac{2}{س^2 - 4س} + \frac{12}{س^3 - 2س^2}$$

$$= \frac{2}{س(س-4)} + \frac{12}{س^2(س-2)}$$

$$= \frac{2}{س(س-2)(س+2)} - \frac{12}{س^2(س-2)}$$

(التحليل)

$$= \frac{1}{س(س-2)(س+2)} - \frac{6}{س^2(س-2)}$$

$$\text{مجال د} = ح - \left\{ \frac{1}{2} ، ٠ ، \frac{1}{3} \right\}$$

$$\text{م.م. للمقامات} = س(س+2)(س-2)$$

$$\therefore ن(س) = \frac{1+س^2}{س(س+2)(س-2)} - \frac{6س}{س(س+2)(س-2)}$$

$$\therefore ن(س) = \frac{1-س^2-6س}{س(س+2)(س-2)} = \frac{1-س(س+6)}{س(س+2)(س-2)}$$

$$= \frac{1}{س(س+2)(س-2)}$$

ن(٠) ليس لها وجود لأن الصفر \notin مجال الدالة ن ،

$$ن(١-) = \frac{1}{1- \times 1-} = \frac{1}{(1+2-) \times 1-}$$

ثانياً : ضرب وقسمة الكسور الجبرية

فكر وناقش

لكل كسر جبري $n(s) \neq 0$ يوجد معكوس ضربي هو مقلوب الكسر ويرمز له بالرمز $n^{-1}(s)$

$$\text{فإذا كان } n(s) = \frac{s+2}{s+5} \quad \text{فإن } n^{-1}(s) = \frac{s+5}{s+2}$$

حيث مجال $n = \{ -5 \}$ ، مجال $n^{-1} = \{ -2, -5 \}$

ويكون $n(s) \times n^{-1}(s) = 1$

مما سبق يمكننا إجراء عملية ضرب أو قسمة كسرين جبريين على النحو الآتي :

إذا كان n_1, n_2 كسرين جبريين حيث :

$$n_1(s) = \frac{d_1(s)}{d_2(s)} \quad n_2(s) = \frac{d_3(s)}{d_4(s)} \quad \text{فإن :}$$

$$n_1(s) \times n_2(s) = \frac{d_1(s)}{d_2(s)} \times \frac{d_3(s)}{d_4(s)} = \frac{d_1(s) \times d_3(s)}{d_2(s) \times d_4(s)}$$

ويكون مجال $n_1 \times n_2$ هو $\{ - \text{ح} - (ص \text{ ادب}) \cup (ص \text{ ادب}) \}$

$$n_1(s) \div n_2(s) = \frac{d_1(s)}{d_2(s)} \div \frac{d_3(s)}{d_4(s)} = \frac{d_1(s)}{d_2(s)} \times \frac{d_4(s)}{d_3(s)}$$

ويكون مجال $n_1 \div n_2$ هو المجال المشترك لكل من n_1, n_2, n_1^{-1} أي $\{ - \text{ح} - (ص \text{ ادب}) \cup (ص \text{ ادب}) \}$

أمثلة

$$4 \quad \text{إذا كانت } n(s) = \frac{s+1}{s^2-s-2} \times \frac{s^2+s-3}{s^2+s+5} = ?$$

فأوجد $n(s)$ في أبسط صورة وعين مجالها ثم أوجد $n(0)$ ، $n(-1)$ إن أمكن ذلك.

الحل

$$n(s) = \frac{(s+1)(s+5)(s-2)}{(s+3)(s+5)(s-2)}$$

$$= \frac{1}{s+3}$$

(أبسط صورة)

$$\text{ومجال } n = \{ - \text{ح} - \{ 0, -1, -\frac{1}{3} \} \} \quad n(0) = 1$$

$n(-1)$ ليس لها وجود لأن $-1 \notin$ مجال n .

٥ إذا كانت ن (س) = $\frac{٩ - ٢س}{٩ - ٢س} \div \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} = \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س}$ فاوجد ن (س) في أبسط صورة موضّحًا مجال ن .

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ن (س)} &= \frac{٩ - ٢س}{٩ - ٢س} \div \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} = \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} \\ \therefore \text{ن (س)} &= \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} \times \frac{٩ - ٢س}{٩ - ٢س} = \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} \\ \text{مجال ن} &= \{٣, ٥, \frac{٢}{٣}, \frac{٢}{٣} - ١, ٠\} \\ \therefore \text{ن (س)} &= \frac{٣س + ٢س}{٩ - ٢س} \times \frac{٣س + ٢س}{٣س + ٢س} = \frac{٣س + ٢س}{٣س + ٢س} \\ &= \frac{٣س + ٢س}{٣س + ٢س} = \frac{٣س + ٢س}{٣س + ٢س} = ١ \end{aligned}$$

٦ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبيّنًا مجال ن :

$$\text{ن (س)} = \frac{٢س + ٢س}{٢٧ - ٢س} \div \frac{٢س + ٢س}{٩ + ٣س + ٢س}$$

ثم أوجد ن (٢)، ن (٣) إن أمكن.

الحل

$$\text{ن (س)} = \frac{٢س + ٢س}{٢٧ - ٢س} \times \frac{٩ + ٣س + ٢س}{٢س + ٢س}$$

$$= \frac{(٢س + ٢س)(٩ + ٣س + ٢س)}{(٢س + ٢س)(٢٧ - ٢س)}$$

∴ مجال ن = ح - {٣، ٢}

$$\therefore \text{ن (س)} = \frac{٢س}{٣ - ٢س}$$

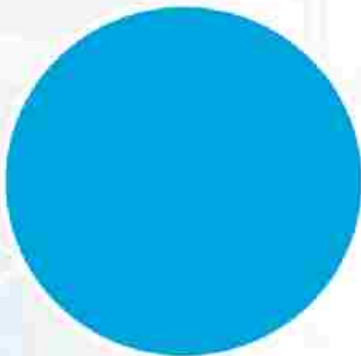
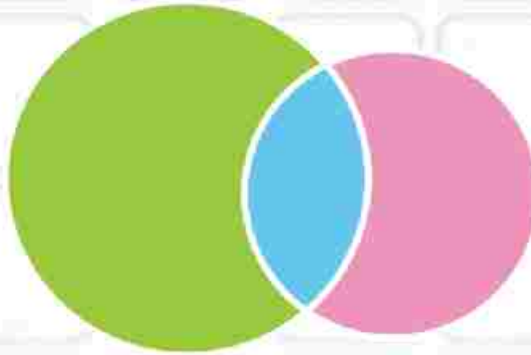
$$\text{ن (٢)} = \frac{٢}{٣ - ٢} = ٢$$

∴ ن (٢) غير معرفة لأن ٢ ∉ مجال ن

الاحتمال

الوحدة الثالثة: الاحتمال

الاحتمال



العمليات على الأحداث



☆ إجراء العمليات على الأحداث (التقاطع - الاتحاد).

مصطلحات أساسية

- ☆ تقاطع
- ☆ اتحاد
- ☆ حدثان متنافيان
- ☆ شكل فن.

التقاطع و الاتحاد

تعلم أن:

إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائياً. ولو حظ العدد الظاهر على الوجه العلوي فإن:



- ١ فضاء العينة (ف) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }.
- ٢ حدث ظهور العدد ٧ هو ϕ ويسمى الحدث المستحيل واحتمال ظهوره = صفر
- ٣ حدث ظهور عدد أقل من ٩ هو ف ويسمى الحدث المؤكد واحتمال ظهوره = ١
- ٤ حدث ظهور عدد أولي زوجي هو { ٢ } وهو مجموعة جزئية من ف واحتمال وقوعه = $\frac{1}{6}$

فإذا كان حدث من ف أي: $A \supseteq F$ فإن: $P(A) = \frac{n(A)}{n(F)}$

حيث: $n(A)$ عدد عناصر الحدث A ، $n(F)$ عدد عناصر فضاء العينة ف،
 $P(A)$ احتمال وقوع الحدث A

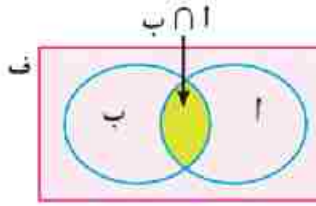
نلاحظ أن: يمكن كتابة الاحتمال في صورة كسر أو نسبة مئوية كما يلي:

مؤكد الحدوث	غالباً	أحياناً	نادراً	مستحيل الحدوث
١	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	٠
%١٠٠	%٧٥	%٥٠	%٢٥	%٠

العمليات على الأحداث:

حيث إن الأحداث هي مجموعات جزئية من فضاء العينة (ف)، لذلك فإن العمليات على الأحداث هي نفس العمليات على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع، وباعتبار فضاء العينة (ف) المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الأحداث والعمليات عليها بأشكال فن كما يلي:

أولاً: التقاطع



إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة (ف) فإن تقاطع الحدثين أ، ب والذي يرمز له بالرمز $أ ∩ ب$ يعني حدث وقوع أ و ب معاً.

لاحظ أن: يُقال إن حدثاً ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة عنصراً من عناصر المجموعة التي تعبر عن هذا الحدث.

مثال (١)

مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ بدون تكرار خلطت جيداً، فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائياً.

١ اكتب فضاء العينة

٢ اكتب الأحداث الآتية.

أ الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً.

ب الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً أولياً.

ج الحدث: أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً يقبل القسمة على ٤.

٣ باستخدام أشكال فن احسب احتمال:

أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معاً.

ب حدث وقوع الحدثين ب، ج معاً.

الحل

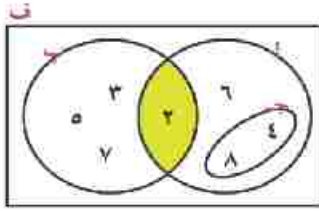
١ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} ، ن (ف) = ٨

٢ أ = {٢، ٤، ٦، ٨}

ب = {٢، ٣، ٥، ٧}

ج = {٤، ٨}

٣ باستخدام شكل فن المقابل نجد أن:



أ حدث وقوع الحدثين أ، ب معًا يعني $A \cap B$ حيث:

$A \cap B = \{2\}$ وهي مجموعة ذات عنصر واحد

$$\therefore n(A \cap B) = 1$$

∴ احتمال وقوع الحدثين أ، ب معًا $= P(A \cap B)$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(F)} = \frac{1}{8}$$

ب حدث وقوع الحدثين أ، ج معًا يعني $A \cap C$ حيث:

$$A \cap C = \{2, 4, 6, 8\} \therefore n(A \cap C) = 4$$

$$\therefore \text{احتمال وقوع الحدثين أ، ج معًا} = P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(F)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ج حدث وقوع الحدثين ب، ج معًا يعني $B \cap C$ حيث:

$B \cap C = \emptyset$ (لأن ب، ج مجموعتان منفصلتان أو متباعدتان)، $n(B \cap C) = 0$ = صفر

$$\therefore \text{احتمال وقوع الحدثين ب، ج معًا} = P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(F)} = \frac{0}{8} = 0 = \text{صفر}$$

لاحظ أن: الحدثين ب، ج لا يمكن وقوعهما في آن واحد، ولذلك يقال إن الحدثين ب، ج حدثان متنافيان.

الأحداث المتنافية،



يقال إن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان $A \cap B = \emptyset$

$$\text{ويكون } P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } \emptyset}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

ويقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية متتالية مثلي.

مثال ٢ إذا ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائياً، ولو حظ العدد الظاهر على الوجه العلوي.

أولاً: اكتب فضاء العينة ف.

ثانياً: أوجد ما يأتي:

ب: حدث ظهور عدد فردي.

أ: حدث ظهور عدد زوجي.

ج: حدث ظهور عدد أولي.

ثالثاً:

٢ هل الأحداث أ، ب، ج أحداث متنافية؟

١ أوجد $P(A \cap B)$

الطل

ثالثاً: ١ ∴ $A \cap B = \emptyset$

$$\therefore P(A \cap B) = \text{صفر}$$

أولاً: ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

ثانياً: أ = {٢، ٤، ٦}

ب = {١، ٣، ٥}

ج = {٢، ٣، ٥}

٢ $A \cap C = \{2\}$ ، $B \cap C = \{3, 5\}$

∴ الأحداث أ، ب، ج غير متنافية.

ثانياً، الاتحاد

إذا كان A ، B حدثين من فضاء العينة (ف) فإن اتحاد الحدثين، والذي يُرمز له بالرمز $A \cup B$ يعني حدث وقوع الحدثين A أو B أو كليهما، أي حدث وقوع أحدهما على الأقل.

مثال (٣)



١) تسع بطاقاتٍ متماثلة مرقّمة من ١ إلى ٩ سحبت منها بطاقةً واحدةً عشوائياً.

أولاً: اكتب فضاء العينة.

ثانياً: اكتب الأحداث الآتية:

أ) أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً زوجياً.

ب) أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً يقبل القسمة على ٣.

ج) أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً أولياً أكبر من ٥.

ثالثاً: باستخدام شكل فُن احسب احتمال كل من:

أ) حدث وقوع A أو B

ب) حدث وقوع A أو B

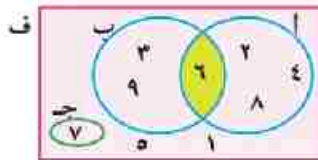
ج) أوجد $P(A) + P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$ ماذا تلاحظ؟

الحل

أولاً: ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ن(ف) = ٩

ثانياً: أ = {٢، ٤، ٦، ٨} ، ن(أ) = ٤ ، ب = {٣، ٦، ٩} ، ن(ب) = ٣ ، ج = {٧} ، ن(ج) = ١

ثالثاً: من شكل فُن المقابل:



أ) حدث وقوع A أو B يعني $A \cup B$

حيث: $A \cup B = \{٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ٩\}$ ، ن($A \cup B$) = ٦

$$\therefore \text{احتمال وقوع } A \text{ أو } B = P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(F)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

ب) حدث وقوع A أو B يعني $A \cap B$ وهما مجموعتان منفصلتان.

فيكون $A \cap B = \{٢، ٤، ٦، ٨، ٧\}$ ، ن($A \cap B$) = ٥

$$\therefore \text{احتمال وقوع } A \text{ أو } B = P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(F)} = \frac{٥}{٩}$$

$$\begin{aligned} \text{ج} \quad \text{ل (أ)} &= \frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{4}{9} \quad , \quad \text{ل (ب)} = \frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{3}{9} \\ \text{ل (ب} \cap \text{أ)} &= \frac{\text{ن (ب} \cap \text{أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{1}{9} \quad \therefore \text{ل (أ)} + \text{ل (ب)} - \text{ل (ب} \cap \text{أ)} = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ \text{ل (أ} \cup \text{ب)} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

من (١)، (٢) يكون

$$\text{ل (أ} \cup \text{ب)} = \text{ل (أ)} + \text{ل (ب)} - \text{ل (ب} \cap \text{أ)}$$

يلاحظ أن أ، ج حدثان متنافيان .
 فيكون ل (أ ∪ ج) = ل (أ) + ل (ج) - ل (أ ∩ ج) لكن ل (أ ∩ ج) = صفر
 لكن ل (أ ∩ ج) = صفر
 $\therefore \text{ل (أ} \cup \text{ج)} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$
 $\frac{0}{9} =$ كما سبق إيجاداه
 أي أنه إذا كان أ، ج حدثين متنافيين فإن ل (أ ∪ ج) = ل (أ) + ل (ج)

(٤)



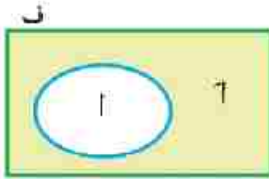
مثال إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ماء، وكان ل (أ) = $\frac{1}{3}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{7}{12}$ فأوجد ل (ب).

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{ل (أ} \cap \text{ب)} &= \phi \\ \therefore \text{ل (أ} \cup \text{ب)} &= \text{ل (أ)} + \text{ل (ب)} \\ \frac{7}{12} &= \frac{1}{3} + \text{ل (ب)} \\ \therefore \text{ل (ب)} &= \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12} - \frac{4}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

تابع العمليات على الأحداث الحدث المكمل، والفرق بين حدثين

لاحظ أن:



في شكل ثن المقابل:

إذا كانت F المجموعة الشاملة، $A \supset F$
فإن مكمله المجموعة A هي \bar{A} ويلاحظ أن:

$$1 \quad \bar{A} \cup A = F, \quad \bar{A} \cap A = \phi$$

$$2 \quad \text{إذا كانت } F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad A = \{2, 4, 6\} \text{ فإن } \bar{A} = \{1, 3, 5, 7\}$$

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان F فضاء العينة لتجربة عشوائية، و سحبت كرة واحدة من صندوق به كرات متماثلة، ومرقمة من ١ إلى ٧ وملاحظة الرقم عليها.

أ حدث ظهور عدد زوجي: $A = \{2, 4, 6\}$

أ حدث ظهور عدد فردي: $\bar{A} = \{1, 3, 5, 7\}$ وهو حدث مكمل للحدث A

ناتجاً: الحدث المكمل:

الحدث المكمل للحدث A هو \bar{A} وهو حدث عدم وقوع A .

أي أن: إذا كان $A \supset F$ فإن \bar{A} هو الحدث المكمل للحدث A

$$\text{حيث } \bar{A} \cup A = F, \quad \bar{A} \cap A = \phi$$

أي أن الحدث والحدث المكمل له هما حدثان متنافيان.



مثال ١

إذا كان F فضاء العينة لتجربة عشوائية، $A \supset F$ ، \bar{A} هو الحدث المكمل للحدث A ، $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

أكمل الجدول التالي وسجل ملاحظاتك. (بكراسة الفصل)

الحدث A	الحدث \bar{A}	الحدث $A \cup \bar{A}$	الحدث $A \cap \bar{A}$
$\{2, 4, 6\}$	$\{1, 3, 5, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	ϕ
$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	ϕ
$\{5\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	ϕ
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	ϕ	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	ϕ

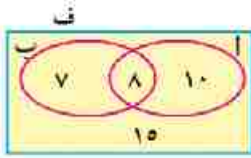
من الجدول السابق لاحظ أن: $\bar{A} \cup A = F$ ، $\bar{A} \cap A = \phi$ ، فيكون: $\bar{A} \cup A = F$ ، $\bar{A} \cap A = \phi$

ملاحظة: $\bar{A} \cup A = F$ ، $\bar{A} \cap A = \phi$

مثال ٢

- ١ فصل دراسي به ٤٠ تلميذاً منهم ١٨ تلميذاً يقرءون جريدة الأخبار، ١٥ تلميذاً يقرءون جريدة الأهرام، ٨ تلاميذ يقرءون الجريدتين معاً. فإذا اختير تلميذ عشوائي من هذا الفصل، احسب احتمال أن يكون التلميذ:
- أ يقرأ جريدة الأخبار. ب لا يقرأ جريدة الأخبار.
- ج يقرأ جريدة الأهرام. د يقرأ الجريدتين معاً.

الطل



بفرض أن أ حدث قراءة جريدة الأخبار ، ب حدث قراءة جريدة الأهرام فيكون $A \cap B$ هو حدث قراءة الجريدتين معاً.

ويكون $n(A) = 18$ ، $n(B) = 15$ ، $n(A \cap B) = 8$ ،

أ الحدث أ: يقرأ جريدة الأخبار فيكون $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

ب لا يقرأ جريدة الأخبار حدث مكمل للحدث أ وهو

$$\therefore P(\bar{A}) = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة } \bar{A}}{n} = \frac{7 + 15}{40} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

$$\text{حل آخر: } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

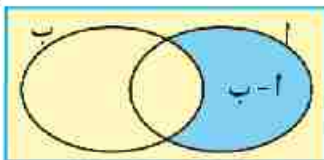
ج الحدث ب: يقرأ جريدة الأهرام فيكون $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

د الحدث $A \cap B$ يعني قراءة الجريدتين معاً

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$$

فكر هل حدث أن يقرأ جريدة الأخبار يعني حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط؟ فسر إجابتك.

ف



للتذكير: حدث أن يقرأ جريدة الأخبار يمثل بشكل فن المقابل

بالمجموعة أ بينما حدث أن يقرأ جريدة الأخبار فقط

تعني قراءة جريدة الأخبار دون قراءة أي جريدة أخرى

وتمثل بالمجموعة أ-ب

ونقرأ أ-ب

رابعاً: الفرق بين حدثين

إذا كان أ، ب حدثين من ف فإن أ-ب هو حدث وقوع أ وعدم وقوع ب أي حدث وقوع أ فقط.

$$\text{لاحظ أن: } A - B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

مسألة ٣

إذا كان : A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان $L(A) = 0,7$ ، $L(A \cap B) = 0,3$
فأوجد : $L(A - B)$

الحل:

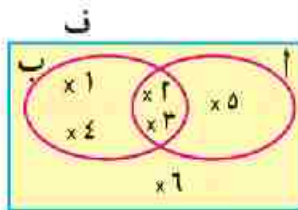
$$\begin{aligned} L(A) &= L(A \cap B) \cup L(A - B) \quad \therefore \\ L(A) &= L(A \cap B) + L(A - B) \quad \therefore \\ 0,7 &= 0,3 + L(A - B) \quad \therefore \\ L(A - B) &= 0,7 - 0,3 = 0,4 \quad \therefore \end{aligned}$$

مسألة ٤

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوي فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد أولي ، B هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥
فأوجد :

- (١) احتمال وقوع الحدث A فقط
(٢) احتمال وقوع الحدث B فقط

الحل



$$\begin{aligned} F &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ A &= \{2, 3, 5\} , B = \{1, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

(١) حدث وقوع الحدث A فقط = $A - B = \{5\}$ $\therefore L(A - B) = 1/6$

احتمال وقوع الحدث A فقط = $L(A - B) = \frac{L(A - B)}{L(F)} = \frac{1}{6}$

(٢) حدث وقوع الحدث B فقط = $B - A = \{1, 4\}$ $\therefore L(B - A) = 2/6 = 1/3$

احتمال وقوع الحدث B فقط = $L(B - A) = \frac{L(B - A)}{L(F)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

الوحدة الرابعة: الدائرة

الهندسة
المستوية



يجب أن يعرف سائقو السيارات دلالة
علامات المرور جيدا والتمييز بينها
ابحث في مصادر المعرفة المختلفة
(ادارة المرور - المكتبة - الانترنت ...)
عن دلالة علامات المرور



تعاريف ومفاهيم أساسية

فكر وناقش



سوف تتعلم

- ☆ المفاهيم الأساسية المتعلقة بالدائرة.
- ☆ مفهوم محور التماثل في الدائرة.

مصطلحات أساسية

- ☆ دائرة
- ☆ سطح دائرة
- ☆ نصف قطر دائرة
- ☆ وتر
- ☆ قطر دائرة
- ☆ محور تماثل دائرة

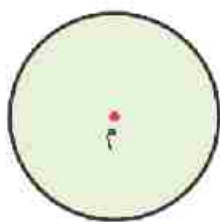


قام يوسف بتشغيل برنامج Google Earth على حاسبه الآلى لدراسة جغرافية مصر. لاحظ يوسف وجود بعض المسطحات الخضراء الدائرية الشكل بجوار المناطق الصحراوية، فسأل والده عنها.

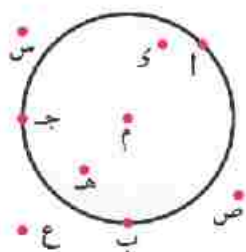
قال الوالد: تعلم أن قطرة ماء تعنى ينبوع حياة، لذلك نرشد استهلاك المياه، فنروي الأراضي بطريقة الري المحورى (رى بالرش)، وفيها تدور عجلات آلة الري حول نقطة ثابتة فترسم هذه الدوائر.

- ١ كيف يمكنك رسم دائرة منتصف ملعب كرة القدم؟
- ٢ ما دورك في ترشيد استهلاك المياه؟

الدائرة: هي مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة من المستوى تسمى "مركز الدائرة" ويسمى البعد الثابت "طول نصف قطر الدائرة".



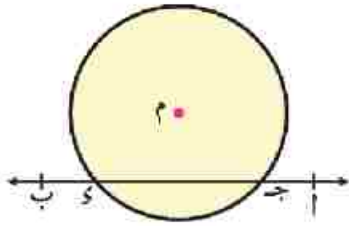
يرمز للدائرة عادة بمركزها، فنقول الدائرة م لنعنى الدائرة التى مركزها النقطة م. كما فى الشكل المقابل. عند رسم دائرة م فى المستوى، فإنها تقسم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط كما بالشكل، وهى:



- ١ مجموعة النقط داخل الدائرة
مثل النقط: م، و، هـ،
- ٢ مجموعة النقط على الدائرة
مثل النقط: أ، ب، ج،
- ٣ مجموعة النقط خارج الدائرة
مثل النقط: س، ص، ع،

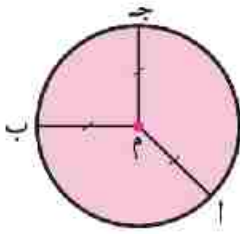
سطح الدائرة: هو مجموعة نقط الدائرة \cup مجموعة النقط داخل الدائرة.

مسائل ١



- في الشكل المقابل، لاحظ أن:
- ١ $\vec{AB} \cap \text{الدائرة م} = \{س، د\}$ ٢ $\vec{AB} \cap \text{سطح الدائرة م} = \vec{جس}$
 - ٣ $\text{م} \notin \text{الدائرة م}$ ، $\text{م} \in \text{سطح الدائرة م}$

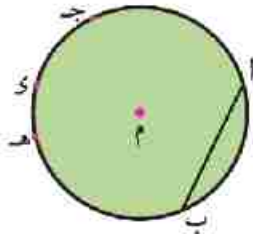
نصف قطر الدائرة: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهاياتها) مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.



في الشكل المقابل م أ ، م ب ، م ج أنصاف أقطار للدائرة م حيث:
 $\text{م} = \text{م ب} = \text{م ج} = \text{طول نصف قطر الدائرة (م م)}$

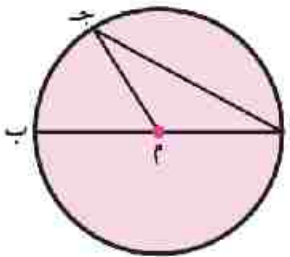
تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولان نصفى قطريهما

الوتر: هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهاياتها) أى نقطتين على الدائرة



في الشكل المقابل:
 ارسم جميع أوتار الدائرة التي تمر بأزواج النقط أ ، ب ، ج ، د ، هـ

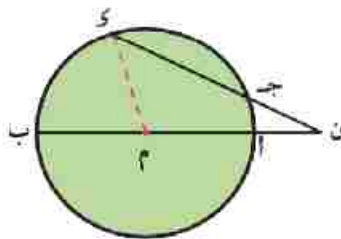
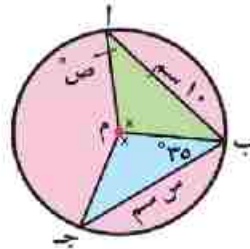
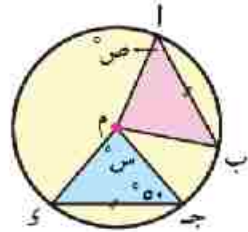
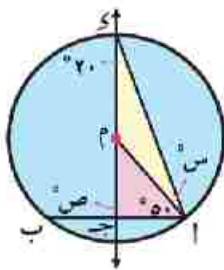
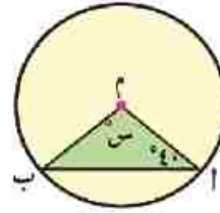
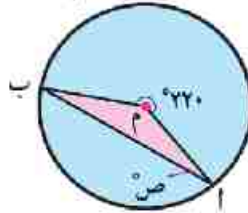
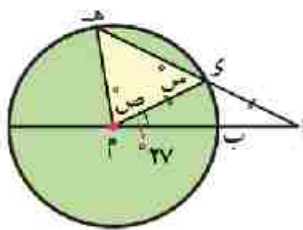
القطر: هو الوتر المار بمركز الدائرة



- ١ أى الأوتار في الشكل المقابل قطر في الدائرة م؟
- ٢ ما عدد أقطار أى دائرة؟
- ٣ لإثبات أن قطر الدائرة هو أكبر أوتارها طولاً:
 في المثلث م ج د: $\text{م ج} + \text{م د} < \text{ج د}$
 في الدائرة م: $\text{ج م} = \text{م د}$ (أنصاف أقطار)
 فيكون: $\text{م ج} + \text{م د} < \text{ج د}$ $\therefore \text{أ ب} < \text{ج د}$



في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



مثال ١

في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ قطر في الدائرة $م$. $ب \cap كج = س$ و $كج = ن$.
أثبت أن: $ن < ب < ك$

الحل

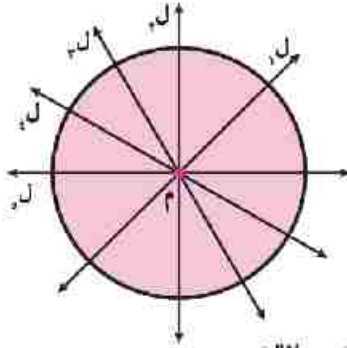
نرسم نصف القطر $م ك$ ، في $\Delta ن م ك$: $م + ن + ك < ن < ك$
 ∴ $م = ب = ك$ (أنصاف أقطار)
 ∴ $م + ن + م < ن < ك$
 ∴ $ن < ب < ك$ (وهو المطلوب)



في المثال السابق أثبت أن: $ن < ج < ن$.

التمائل في الدائرة

نشاط ١



- ١ ارسم الدائرة م على ورقة شفافة باستخدام الفرجار.
 - ٢ ارسم مستقيماً ل يمر بمركز الدائرة ويقسمها إلى قوسين.
 - ٣ اطو الورقة حول المستقيم ل، ماذا تلاحظ؟
 - ٤ ارسم مستقيماً آخر ل يمر بمركز الدائرة ثم اطو الورقة حوله.
- كرر العمل عدة مرات برسم المستقيمات ل، ل، ماذا تلاحظ في كل حالة؟

من النشاط السابق نستنتج أن:

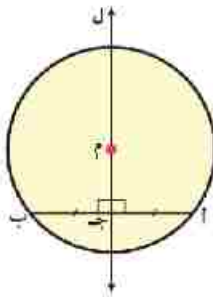
أي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تماثل لها



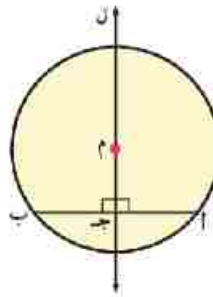
فكر ما عدد محاور التماثل في الدائرة؟

نشاط ٢

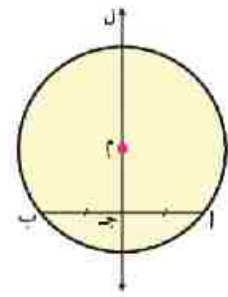
ادرس كلاً من الأشكال التالية (المعطيات كما بالرسم)، ماذا تستنتج؟



٣



٢



١

- | | |
|------|--|
| ١ من | المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون عمودياً على هذا الوتر. |
| ٢ من | المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أي وتر فيها ينصف هذا الوتر. |
| ٣ من | المستقيم العمودي على أي وتر في الدائرة من منتصفه يمر بمركز الدائرة. |

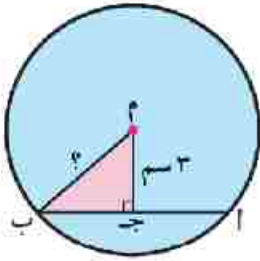




أجب في كراسة الفصل:

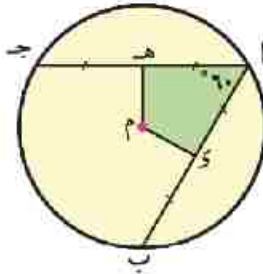


١ في كل من الأشكال الآتية م دائرة



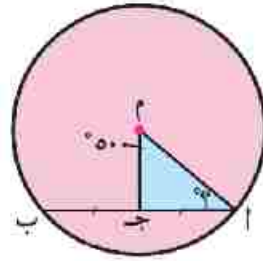
أ

إذا كان $AB = 8$ سم
أوجد م ب



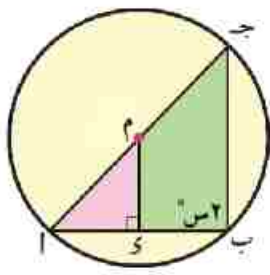
ب

أوجد و (Δ م هـ)



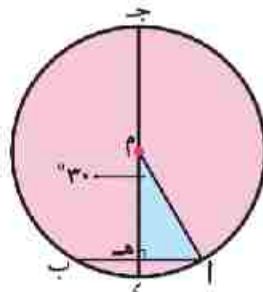
ج

أوجد و (Δ م أ ج)



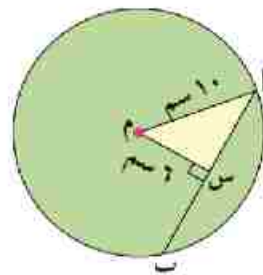
د

أوجد قبة س



هـ

إذا كان $AB = 10$ سم
أوجد ج و



و

أوجد أ ب

مثال ٢

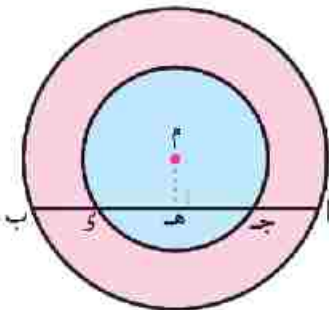


في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز م، \overline{AB} وتر في الدائرة الكبرى يقطع الدائرة الصغرى في ج، و. أثبت أن: $أج = ب و$

الحل

المعطيات: $\overline{AB} \cap$ الدائرة الصغرى = {ج، و}

المطلوب: $أج = ب و$



العمل: نرسم م هـ \perp \overline{AB} تقطعها في هـ.

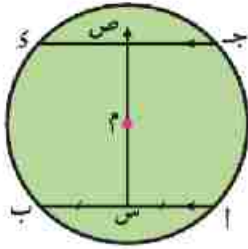
البرهان: في الدائرة الكبرى $\overrightarrow{MH} \perp \overline{AB}$ $\therefore HA = HB$ (نتيجة (1))

في الدائرة الصغرى $\overrightarrow{MH} \perp \overline{CD}$ $\therefore HC = HD$ (نتيجة (2))

بطرح (2) من (1) ينتج أن:

هـ أ - هـ ج = هـ ب - هـ د \therefore أ ج = ب د (وهو المطلوب)

سؤال 3



في الشكل المقابل: م دائرة، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، س منتصف \overline{AB}
رسم س م فقطع \overline{CD} في ص. **أثبت** أن ص منتصف \overline{CD}

العمل

المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، أ س = ب س

المطلوب: ج د = ص د = س د

البرهان: \therefore س منتصف \overline{AB}

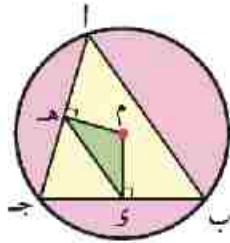
$\therefore \overrightarrow{MS} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، س ص قاطع لهما

$\therefore \angle (S \text{ ص } د) = \angle (S \text{ س } ص) = 90^\circ$ بالتبادل

$\therefore \overrightarrow{MS} \perp \overline{CD}$

\therefore ص منتصف \overline{CD} (وهو المطلوب)



امثال ٤

في الشكل المقابل: \overline{AB} جـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م،

$\overline{M} \perp \overline{AB}$ جـ، $\overline{M} \perp \overline{AC}$ جـ

أثبت ان: أولاً: $\overline{H} \parallel \overline{AB}$

ثانياً: محيط Δ جـ $\overline{H} = \frac{1}{4}$ محيط Δ \overline{AB} جـ

الطل

المعطيات: $\overline{M} \perp \overline{AB}$ جـ، $\overline{M} \perp \overline{AC}$ جـ

المطلوب: أولاً: $\overline{H} \parallel \overline{AB}$

ثانياً: محيط Δ جـ $\overline{H} = \frac{1}{4}$ محيط Δ \overline{AB} جـ

البرهان:

أولاً: $\overline{M} \perp \overline{AB}$ جـ \therefore \overline{M} منتصف \overline{AB} جـ (١)

$\overline{M} \perp \overline{AC}$ جـ \therefore \overline{M} منتصف \overline{AC} جـ (٢)

في Δ \overline{AB} جـ، \overline{M} منتصف \overline{AB} جـ، \overline{H} منتصف \overline{AC} جـ

$\therefore \overline{H} \parallel \overline{AB}$ (وهو المطلوب أولاً)

$\overline{H} = \frac{1}{4} \overline{AB}$ (٣)

ثانياً: من (١)، (٢)، (٣):

\therefore محيط Δ جـ $\overline{H} = \overline{H} + \overline{JH} + \overline{JH} = \frac{1}{4} \overline{AB} + \frac{1}{4} \overline{AC} + \frac{1}{4} \overline{BC}$

$= \frac{1}{4} (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$

$= \frac{1}{4}$ محيط Δ \overline{AB} جـ

أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

أولاً: وضع نقطة بالنسبة لدائرة.

فكر وناقش

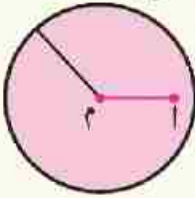


في الشكل المقابل، الدائرة م تجزئ نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقاط.

- ١ كيف تحدد وضع النقاط: أ، ب، ج بالنسبة للدائرة م؟
- ٢ ما العلاقة بين (م، أ، ب)، (م، ب، ج)، (م، ج، ب)؟

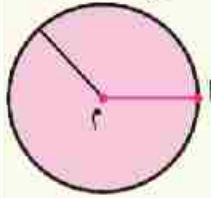
إذا كانت م دائرة طول قطرها م، وكانت أ نقطة في مستوى الدائرة، فإن:

٣ أ تقع داخل الدائرة



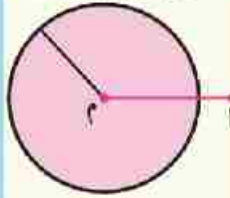
ويكون: $م > أ$ والعكس صحيح

٢ أ تقع على الدائرة



ويكون: $م = أ$ والعكس صحيح

١ أ تقع خارج الدائرة



ويكون: $م < أ$ والعكس صحيح

لاحظ الآتي:

إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها = $٤ سم$ ، أ نقطة في مستواها فإنها:

- ١ إذا كان: $م = أ = ٤ سم$ ، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب
- ٢ إذا كان: $م = أ = ٣.٧٢ سم$ ، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب
- ٣ إذا كان: $م = أ = ٦.٧٣ سم$ ، فأين تقع أ من الدائرة م، مع ذكر السبب
- ٤ إذا كان: $م = أ = صفرًا$ ، فأين تقع أ من الدائرة م، ماذا نلاحظ؟

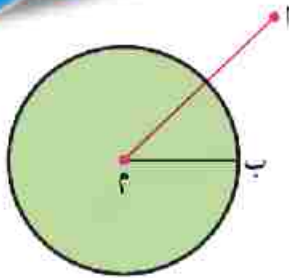


سوف تتعلم

- ☆ تحديد وضع نقطة بالنسبة لدائرة .
- ☆ تحديد وضع مستقيم بالنسبة لدائرة .
- ☆ تحديد علاقة المماس بنصف قطر الدائرة .
- ☆ تحديد وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى .
- ☆ علاقة خط المركزين بالوتر المشترك والمماس المشترك .

مصطلحات أساسية

- ☆ نقطة تقع خارج دائرة
- ☆ نقطة تقع على دائرة
- ☆ نقطة تقع داخل دائرة
- ☆ دائرتان متباعدتان
- ☆ دائرتان متقاطعتان
- ☆ دائرتان متماستان
- ☆ مماس مشترك
- ☆ خط المركزين
- ☆ وتر مشترك



مثال ١

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها ٥ سم، أنقطة في مستوى الدائرة،
 $M = A = ٣$ - $M = ٢$ من السنتيمترات. **أوجد** قيم s عندما تقع خارج الدائرة.

الحل

∴ نقطة A تقع خارج الدائرة M ∴ $M = A < ٥$ فيكون: $M = ٢ - ٣ < ٥$ أي أن: $M = ٢ < ٨$ ∴ $s < ٤$



في المثال السابق، أوجد قيمة s في الحالات التالية:

- ١ $M = A = ٢ + ١$ ، النقطة أعلى الدائرة. ٢ $M = A = ٨ - ٢٧$ ، النقطة داخل الدائرة.

ثانياً: وضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها r ، L مستقيم في مستويها، $M \perp L$ حيث $M \cap L = A$ ، فإن:

١	٢	٣
المستقيم L يقع خارج الدائرة M	المستقيم L قاطع للدائرة M	المستقيم L مماس للدائرة M
$L \cap \text{الدائرة } M = \emptyset$	$L \cap \text{الدائرة } M = \{ج، د\}$	$L \cap \text{الدائرة } M = \{أ\}$
ويكون: $M < r$ والعكس صحيح	ويكون: $M > r$ والعكس صحيح	ويكون: $M = r$ والعكس صحيح

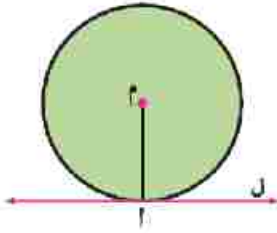
فكر في كل من الحالات السابقة، أوجد $L \cap$ سطح الدائرة M .

لاحظ الآتي:

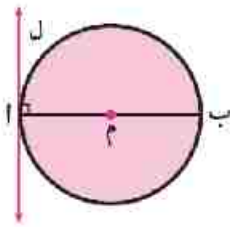
إذا كانت M دائرة طول نصف قطرها r سم، $M \perp L$ حيث $L \ni A$ ؛ فإنه:

- ١ إذا كان $M = A = ٤ \sqrt{٣}$ سم
- ٢ إذا كان $M = A = ٣ \sqrt{٧}$ سم
- ٣ إذا كان $M = A = ٥ - ٩$
- ٤ إذا كان المستقيم L يقطع الدائرة M ، $M = A = ٣ - ٥$ فما قيمة s ؟
- ٥ إذا كان المستقيم L مماساً للدائرة M ، $M = A = ٢ - ٢$ فما قيمة s ؟

حقائق هامة

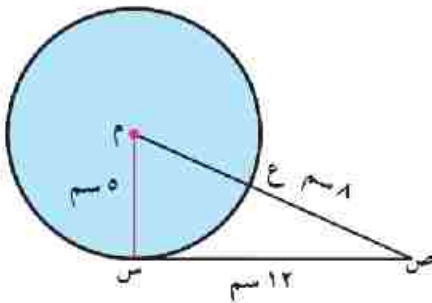


١ المماس للدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.



٢ المستقيم العمودي على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماساً للدائرة.

- ١ كم مماساً يمكن رسمه للدائرة م؟
أولاً: من نقطة على الدائرة. ثانياً: من نقطة خارج الدائرة.
- ٢ ما العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتي أي قطر فيها؟



مثال ٢

في الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم،
س ص = ١٢ سم، م ص \cap الدائرة م = {ع}، ع ص = ٨ سم.
أثبت أن: س ص مماس للدائرة م عند س.

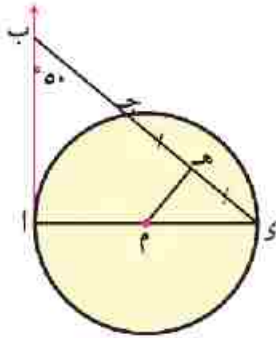
الحل

$$\begin{aligned} \therefore \text{م ص} \cap \text{الدائرة م} &= \{ع\} \\ \therefore \text{م ص} &= \text{م س} = ٥ \text{ سم (أنصاف أقطار)} \\ \therefore \text{م ص} &= ٨ + ٥ = ١٣ \text{ سم} \\ \therefore (\text{م ص})^2 &= ١٦٩ = ٢(١٣) = ٢(\text{م س}) \quad , \quad ٢٥ = ٢(٥) = ٢(\text{م س}) \quad , \quad (\text{س ص})^2 = ١٤٤ = ٢(١٢) = ٢(\text{س ص}) \\ \therefore (\text{م س})^2 + (\text{س ص})^2 &= ١٦٩ + ١٤٤ = ٣١٣ = ٢(\text{م ص})^2 \\ \therefore \angle \text{م س ص} &= ٩٠^\circ \quad (\text{عكس نظرية فيثاغورث}) \\ \therefore \text{س ص} &\perp \text{م ص} \\ \therefore \text{س ص} &\text{ مماس للدائرة عند س (وهو المطلوب)} \end{aligned}$$

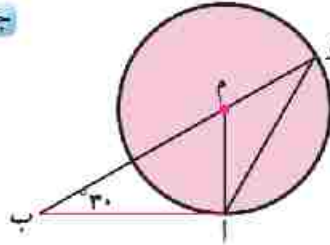
أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:



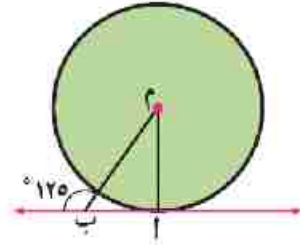
١ في كل من الأشكال الآتية، م دائرة، \overleftrightarrow{AB} مماس:



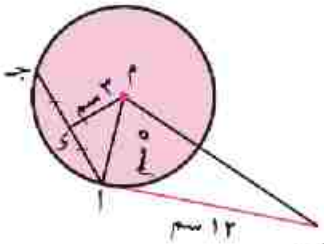
أوجد $\angle AMB$



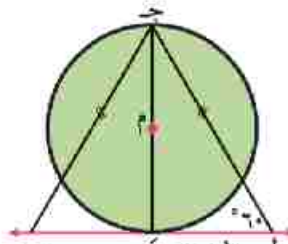
أوجد $\angle AMB$



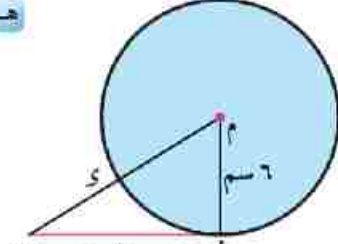
أوجد $\angle AMB$



أوجد محيط الشكل AMB

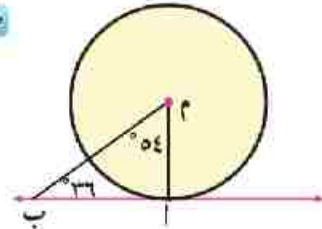
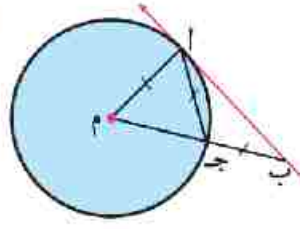
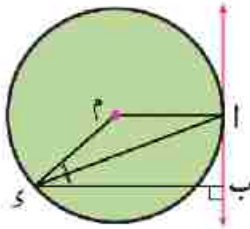


أوجد محيط $\triangle AMB$

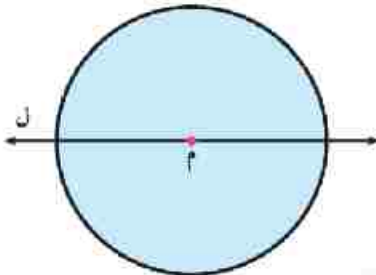


أوجد طول \overline{MB}

٢ في كل من الأشكال الآتية وضح لماذا يكون \overleftrightarrow{AB} مماساً للدائرة م:



ثالثاً: وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى



١ ارسم دائرة مركزها م بطول نصف قطر مناسب = ٥ سم.

٢ ارسم أحد محاور تماثل الدائرة م وليكن المستقيم ل

كما في الشكل المقابل.

٣ على ورقة شفافة،

ارسم دائرة مركزها ن بطول نصف قطر مناسب = $ر_1$ سم حيث $ر_1 > ر_2$.

٤ ضع الورقة الشفافة بحيث تنتمي النقطة ن إلى المستقيم ل.

لاحظ أن المستقيم ل = $\overrightarrow{م ن}$ ويسمى $\overrightarrow{م ن}$ خط المركزين للدائرتين م، ن وهو محور تماثل لهما.

٥ حرك ورقة الشفاف نحو الدائرة م بحيث تظل

ن \exists ل لتشاهد أوضاعًا مختلفة للدائرتين.

قس طول م ن في كل حالة.

ما العلاقة بين طول م ن (البعد بين مركزي الدائرتين م، ن)، $ر_1 + ر_2$ أو $ر_1 - ر_2$ في كل وضع.

لاحظ الآتي:

إذا كان م، ن دائرتين في المستوى، طول نصف قطرهما $ر_1$ ، $ر_2$ على الترتيب حيث $ر_1 < ر_2$ فإنه:

١ إذا كان: م ن $< ر_1 + ر_2$ ، فإن $م \cap ن = \emptyset$ ،

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = \emptyset
وتكون الدائرتان متباعدتين.

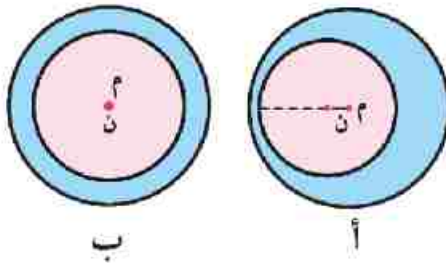
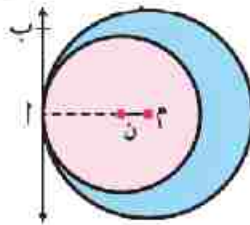
٢ إذا كان: م ن = $ر_1 + ر_2$ ، فإن $م \cap ن = \{ \}$ ،

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = $\{ \}$
وتكون الدائرتان متماسكتين من الخارج.

٣ إذا كان: $ر_1 - ر_2 < م ن < ر_1 + ر_2$ ،

فإن $م \cap ن = \{ ب \}$

سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = سطح المنطقة الصفراء
وتكون الدائرتان متقاطعتين.



٤ إذا كان: $m = n$ ، $r_1 = r_2$ ، فإن $m \cap n = \{ \text{ب} \}$ ،
 سطح الدائرة $m \cap$ سطح الدائرة $n =$ سطح الدائرة n
 وتكون الدائرتان متماسيتين من الداخل.

٥ إذا كان: $m > n$ ، $r_1 = r_2$ ، فإن $m \cap n = \emptyset$ ،
 سطح الدائرة $m \cap$ سطح الدائرة $n =$ سطح الدائرة n
 وتكون الدائرتان متداخلتين كما في شكل أ
 وعندما $m = n$ = صفر، تكون الدائرتان متحدتي المركز.
 كما في شكل ب

نتائج

- ١ خط المركزين لدائرتين متماسيتين يمر بنقطة التماس ويكون عمودياً على المماس المشترك عند هذه النقطة.
- ٢ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه.

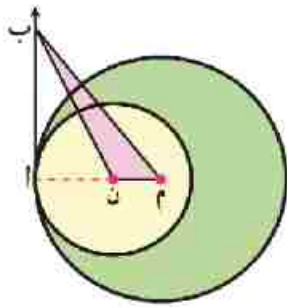
مقال ٣

دائرتان m ، n طولاً نصفى قطريهما ٩ سم، ٤ سم على الترتيب، بين وضع كل منهما بالنسبة للأخرى في الحالات الآتية:

- | | | |
|------------------------|-----------------|----------------|
| أ $m = n = 13$ | ب $m = n = 5$ | ج $m = n = 3$ |
| د $m = n = \text{صفر}$ | هـ $m = n = 10$ | و $m = n = 15$ |

الحل

- ∴ $r_1 = 9$ سم، $r_2 = 4$ سم
- | | | | |
|-----------------|----------------|---------------|------------------------|
| أ $m = n = 13$ | ب $m = n = 5$ | ج $m = n = 3$ | د $m = n = \text{صفر}$ |
| هـ $m = n = 10$ | و $m = n = 15$ | | |
- ∴ $r_1 + r_2 = 9 + 4 = 13$ سم، $r_1 - r_2 = 9 - 4 = 5$ سم
- ∴ $m = n = 13$ سم، $r_1 + r_2 = m = n$ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج.
- ∴ $m = n = 5$ سم، $r_1 - r_2 = m = n$ ∴ الدائرتان متماستان من الداخل.
- ∴ $m = n > 0$ ، $r_1 - r_2 < m = n < r_1 + r_2$ ∴ الدائرة n تقع داخل الدائرة m .
- ∴ الدائرتان متحدتا المركز.
- ∴ $m = n > r_1 + r_2$ ∴ الدائرتان متقاطعتان.
- ∴ $m = n < r_1 + r_2$ ∴ الدائرتان متباعدتان.



مثال ٤

م، ن دائرتان طولاً نصفى قطريهما ١٠سم، ٦سم على الترتيب ومتماستان من الداخل في أ، \overline{AB} مماس مشترك لهما عند أ. إذا كانت مساحة المثلث ب م ن = ٢٤سم^٢، أوجد طول \overline{AB} .

الحل

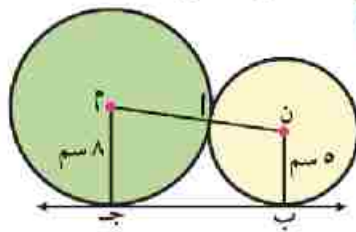
∴ الدائرتان متماستان من الداخل عند أ ∴ $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

فيكون طول \overline{AB} ارتفاعاً للمثلث ب م ن الذي قاعدته م ن حيث: م ن = ١٠ - ٦ = ٤سم (لماذا؟)
مساحة Δ ب م ن = $\frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{AB}$ ∴ $24 = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{AB}$ ∴ $\overline{AB} = 12$ سم

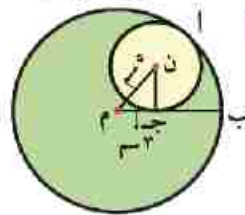
أجب عن الآتي في كراسة الفصل:



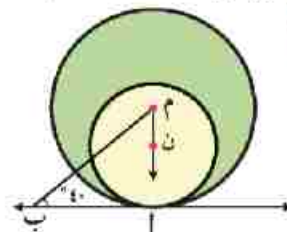
في كل من الأشكال الآتية الدوائر متماسة مثنى مثنى، باستخدام معلومات كل شكل



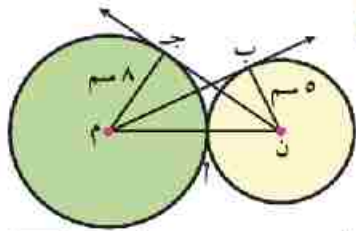
أوجد طول \overline{AB}



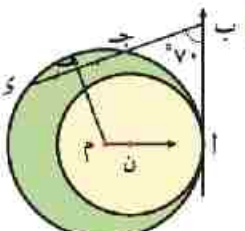
أوجد طول \overline{AB}



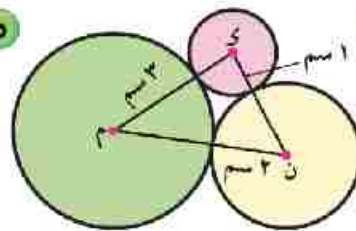
أوجد \angle ب م ن



أوجد طول كل من \overline{MB} ، \overline{NB}



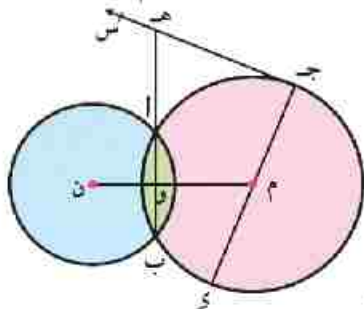
أوجد \angle ه م ن



أوجد \angle م ن ك

مثال ٥

م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، جـ د قطر في الدائرة م، جـ د مماس للدائرة م عند جـ، جـ د \cap ب أ = هـ، م ن \cap ا ب = و. أثبت أن: \angle م ن و = \angle م ن هـ.



الحل

المعطيات: الدائرة م \cap الدائرة ن = {أ، ب}، جـ و قطر في الدائرة م، جـ س مماس للدائرة م.
المطلوب: إثبات أن $\angle م ن و = \angle م ن و$ (جـ هـ ب).
البرهان: \therefore خط المركزين عمودي على الوتر المشترك.

$$\therefore \overline{م ن} \perp \overline{أ ب} \text{ أي } \angle م ن و = \angle م ن و = 90^\circ$$

\therefore جـ و قطر في الدائرة م، جـ س مماس عند جـ

$$\therefore \overline{ج س} \perp \overline{ج و} \text{ أي } \angle ج هـ و = \angle ج هـ و = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ج هـ و + \angle ج م و = \angle ج م و + \angle ج م و = 180^\circ \text{ (لماذا؟)}$$

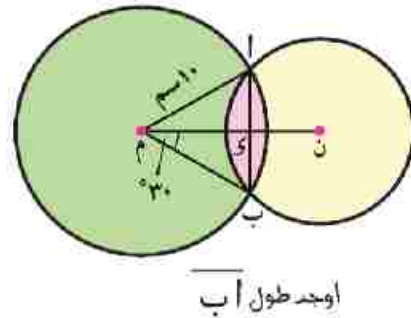
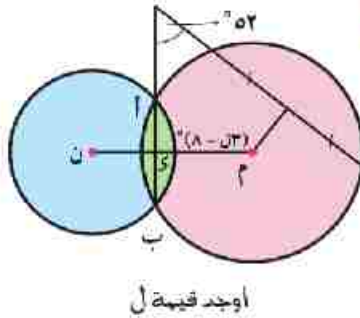
$$\therefore \angle ج م و + \angle ج م و = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ج م و = \angle ج م و \text{ وهو المطلوب}$$

أجب عن السؤالين التاليين في كراسة الفصل:



١ في كل من الأشكال الآتية م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب:



لائحة أن:

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في إذا رسم أ و \perp ب جـ فإن:

(نظرية إقليدس)

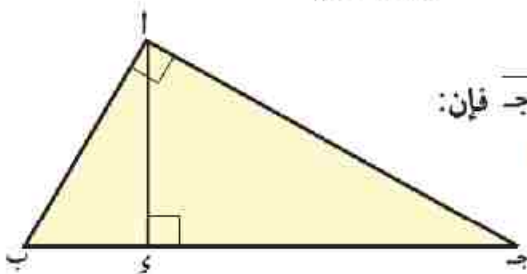
$$ب^2 = ب و \times ج و$$

(نتيجة)

$$أ و^2 = ب و \times ج و$$

لماذا؟

$$أ و \times ب جـ = ب و \times جـ أ$$

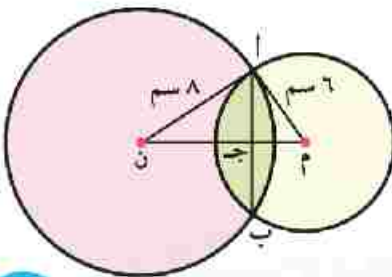


٢ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب

$$\overline{م ن} \cap \overline{أ ب} = \{جـ\}, \text{ أم } 6 \text{ سم}, \text{ أن } 8 \text{ سم},$$

$$\overline{م أ} \perp \overline{أ ن}.$$

أوجد طول أ ب



تعيين الدائرة

فكر و ناقش



١ لماذا يستخدم الفرجار في رسم الدائرة؟

٢ ما محور القطعة المستقيمة.

٣ هل مركز الدائرة يقع على محور أي

وتر فيها؟

٤ كيف يمكنك رسم (تعيين) دائرة في المستوى؟

يمكن رسم (تعيين) دائرة بشروط معطاة، مهما اختلفت، إذا علم:

١ مركز الدائرة. ٢ طول نصف قطر الدائرة.

أولاً: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

المعطيات: أ نقطة معلومة في المستوى.

المطلوب: رسم دائرة تمر بالنقطة أ.

الانشاء:

١ خذ أي نقطة اختيارية مثل م في

نفس المستوى.

٢ ضع سن الفرجار عند م وبفتحة تعادل م أ،

ارسم الدائرة م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٣ ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى م، وبفتحة تعادل م أ، ارسم الدائرة

م، نجد أن الدائرة م تمر بالنقطة أ.

٤ كرر العمل السابق

لاحظان: لكل نقطة من الجوارك (مركز الدائرة) أمكن

رسم دائرة تمر بالنقطة أ.



☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطة معلومة.

☆ كيفية رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين.

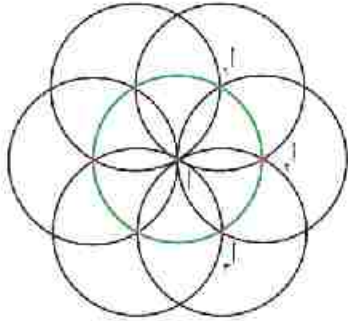
☆ كيفية رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة.

مصطلحات أساسية

☆ دائرة خارجة لمثلث.

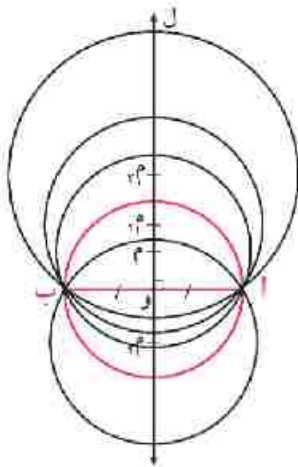


كم عدد نقاط المستوى؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطة أ؟
إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، أين تقع مراكزها؟



مما سبق نستنتج أن:

- 1 يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل أ.
- 2 إذا كانت أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية في الطول، فإن مراكزها تقع على دائرة مطابقة لهم ومركزها النقطة أ.



ثانياً: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:

المعطيات: أ، ب نقطتان معلومتان في المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقطتين أ، ب أي أن \overline{AB} وتر في الدائرة م.

الإنشاء:

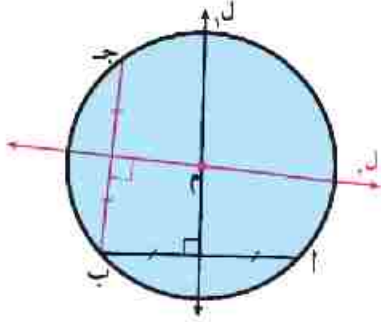
- 1 ارسم القطعة المستقيمة \overline{AB} .
- 2 ارسم المستقيم ل محور \overline{AB} حيث $ل \cap \overline{AB} = \{O\}$ (مركز الدائرة يقع على محور الوتر \overline{AB}).
- 3 خذ أي نقطة اختيارية م حيث $م \notin ل$ ، اركز بسن الفرجار في م وبفتحه تعادل م أ ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب.
- 4 ضع سن الفرجار في نقطة أخرى مثل م، حيث $م \notin ل$ ، وبفتحة تعادل م أ ارسم الدائرة م، حيث تمر بالنقطة ب.
- 5 كرر العمل السابق ولاحظ:

لكل نقطة من اختيارك (مركز الدائرة) أمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين أ، ب

- 1 كم عدد نقاط المستقيم ل؟ كم عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بالنقطتين أ، ب؟
- 2 ما طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لتمر بالنقطتين أ، ب؟
- 3 هل يمكن أن تتقاطع دائرتان في أكثر من نقطتين؟

مما سبق نستنتج أن:

- ١ يمكن رسم عدد لا نهائي من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل أ، ب.
- ٢ طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكي تمر بالنقطتين أ، ب يكون مساوياً $\frac{1}{2} AB$.
- ٣ لا يمكن أن تتقاطع دائرتان في أكثر من نقطتين.



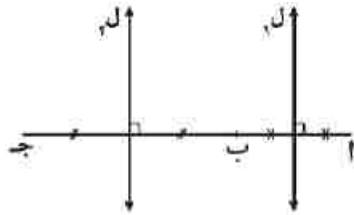
ثالثاً: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:

المعطيات: أ، ب، ج ثلاث نقاط معلومة في المستوى.

المطلوب: رسم دائرة م تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، ج.

الإنشاء:

- ١ ارسم المستقيم l محور \overline{AB} فيكون $M \in l$.
- ٢ ارسم المستقيم l' محور \overline{BC} فيكون $M' \in l'$.
- ٣ إذا كان $l \cap l' = M$ ، ضع سن الفرجار في النقطة M وبفتحة تعادل M ، ارسم الدائرة M تجدها تمر بالنقطتين ب، ج.
- ٤ إذا كان $l \cap l' = \emptyset$ ، فهل يمكنك تعيين موضع النقطة M ؟ فسر إجابتك.



لاحظ أن:

إذا كان أ، ب، ج على استقامة واحدة فإن $l \parallel l'$ ، $l \cap l' = \emptyset$ ولا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث أ، ب، ج.

مما سبق نستنتج أن:

أي ثلاث نقاط لا تنتمي لمستقيم وأهد تمر بها دائرة وحيدة

نتائج

نتيجة (١) الدائرة التي تمر برؤوس مثلث تسمى دائرة خارجية للمثلث.

كما يقال إن المثلث مرسوم داخل دائرة إذا وقعت رؤوسه على الدائرة.

نتيجة (٢) الأعمدة العمامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع في نقطة وأهدة هي مركز الدائرة الخارجية لهذا المثلث.

علاقة أوتار الدائرة بمركزها

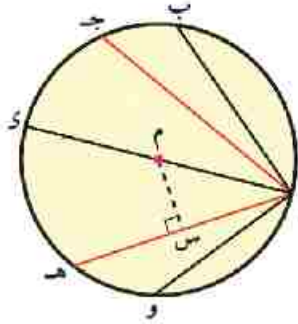


سوف تتعلم

- ☆ استنتاج العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها

مصطلحات أساسية

- ☆ أوتار متساوية
- ☆ دوائر متطابقة



فكر 9 ناقش

في الشكل المقابل:

انقطة على الدائرة م، رسمت فيها الأوتار \overline{AB} ، \overline{AJ} ، \overline{AH} ، \overline{AO} .

١ ما العلاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة؟

٢ إذا تساوت الأوتار في الطول، ماذا تستنتج؟

٣ إذا تساوت أبعاد الأوتار عن مركز الدائرة ماذا تتوقع؟

لاحظ أن:

بُعد الوتر \overline{AH} ، عن مركز الدائرة $M = MS$ حيث S منتصف الوتر \overline{AH} ، في الدائرة M التي طول نصف قطرها MO .

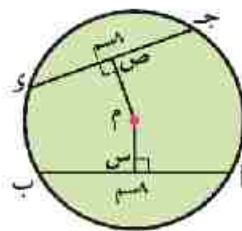
فيكون: $(M) = (MS) + (AS) = (AM)^2 = (MO)^2$ (مقدار ثابت)

أي أن:

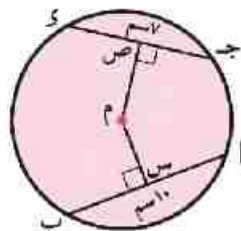
كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله والعكس صحيح



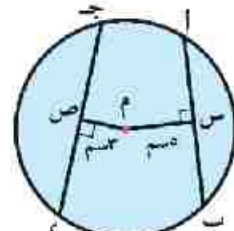
١ أكمل باستخدام ($<$ ، $>$ ، $=$):



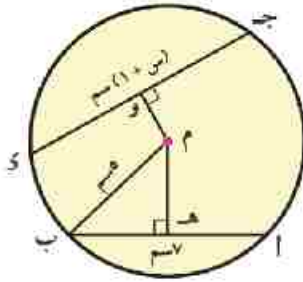
$$MS = MS$$



$$MS > MS$$



$$AB > JK$$



٢ في الشكل المقابل م و > م هـ، أوجد الفترة التي تنتمي إليها س:

$$\therefore \text{ج د} < \text{أ ب}$$

$$\text{س} < ٦$$

$$\therefore \text{ج د} \geq ١٠$$

$$\text{ويكون } ٦ > \text{س} \geq ٩$$

$$\therefore \text{م} > \text{م هـ}$$

$$\therefore \text{س} + ١ < ٧$$

$$\therefore \text{ج د وتر في الدائرة م}$$

$$\therefore \text{س} \geq ٩$$

$$\text{أي أن: س} \in [٩, ٦]$$

نظرية

الأوتار المتساوية الطول في دائرة على أبعاد متساوية من مركزها.

المعطيات: $\overline{أ ب} = \overline{ج د}$ ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{ج د}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{م س} = \overline{م ص}$.

العمل: نرسم $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ج}$.

البرهان: $\therefore \overline{م س} \perp \overline{أ ب}$

$$\therefore \overline{م ص} \perp \overline{ج د}$$

$$\therefore \overline{أ ب} = \overline{ج د}$$

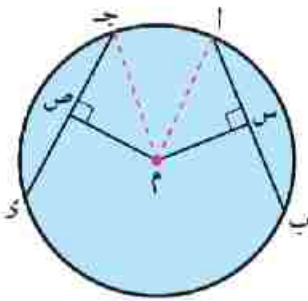
\therefore المثلثين $\triangle م س م$ ، $\triangle م ص م$ ، فيهما:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{م ج} = \overline{م أ} \\ \angle م س م = \angle م ص م = ٩٠^\circ \\ \overline{م س} = \overline{م ص} \end{array} \right\}$$

$$\therefore \triangle م س م \cong \triangle م ص م \text{ (برهاناً)}$$

$$\therefore \overline{م س} = \overline{م ص}$$

$$\therefore \triangle م س م \cong \triangle م ص م \text{ ويتبع أن: } \overline{م س} = \overline{م ص}$$



(وهو المطلوب)

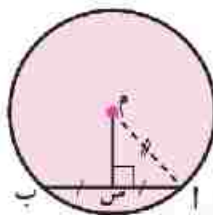
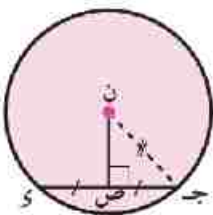
الأوتار المتساوية الطول في الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها

نتيجة

في الشكل المقابل:

الدائرتان م، ن متطابقتان، $\overline{أ ب} = \overline{ج د}$ ، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ،

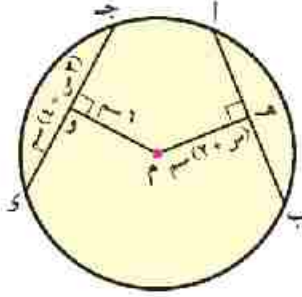
$\overline{ن ص} \perp \overline{ج د}$ ، فإن: $\overline{م س} = \overline{ن ص}$.



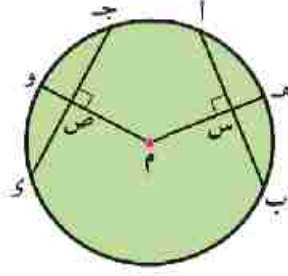


مسألة ٣

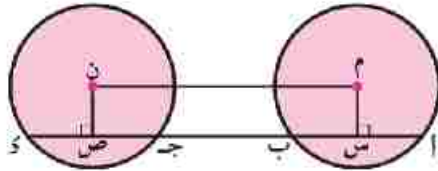
ادرس الشكل ثم أوجد المطلوب:



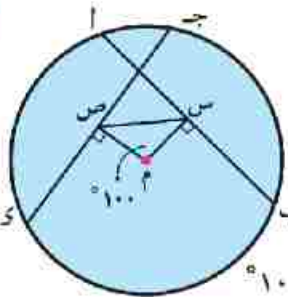
ب إذا كان:
 $AB = CD$
 فأوجد كل من:
 قيمة s ، طول $جـ د$
الحل
 $\because MN \perp AB$
 $\therefore AN = NB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\because MN \perp CD$
 $\therefore CN = ND = \frac{CD}{2}$
 $\because AN = CN$
 $\therefore 3 = \frac{CD}{2}$
 $\therefore CD = 6$



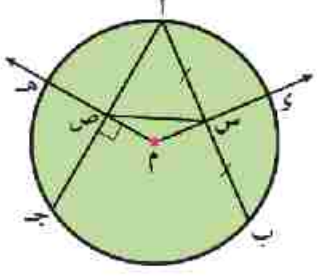
ا إذا كان:
 $AB = CD$
 أثبت أن: $هـ س = و ص$
الحل
 $\because MN \perp AB$
 $\therefore AN = NB = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\because MN \perp CD$
 $\therefore CN = ND = \frac{CD}{2} = \frac{6}{2} = 3$
 $\therefore AN = CN = 3$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore \angle MAN = \angle MCN$
 $\therefore \angle MNA = \angle MNC = 90^\circ$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore MA = MC$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore \angle MAN = \angle MCN$
 $\therefore \angle MNA = \angle MNC = 90^\circ$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore MA = MC$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore \angle MAN = \angle MCN$
 $\therefore \angle MNA = \angle MNC = 90^\circ$
 $\therefore \triangle MNA \cong \triangle MNC$
 $\therefore MA = MC$



إذا كان: M, N دائرتين متطابقتين، $AB = CD$
 فأثبت الشكل $M س ص ن$ مستطيل
الحل: $م س \parallel ن ص$ ، $م س \perp AB$
 $م س = ن ص$
 \therefore الشكل $M س ص ن$ مستطيل



ج إذا كان:
 $AB = CD$
 فأوجد: $ق$ ($\triangle م س ص$)
الحل: $م س = م ص$
 في $\triangle م س ص$
 $\therefore ق = (\triangle م س ص) = 100^\circ$
 $\therefore ق = (\triangle م س ص) + ق = 80^\circ$
 $\therefore ق = (\triangle م س ص) = 40^\circ - 2 \div 80^\circ = 40^\circ$



أب، أج وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س منتصف أب، م س يقطع الدائرة في ك، م ص \perp أج يقطعه في ص ويقطع الدائرة في هـ.
أثبت أن: أولاً: $س ك = ص هـ$.
ثانياً: $ق = (\triangle م س ب) = ق = (\triangle م س ص ج)$
المعطيات: $أب = أج$ ، $س$ منتصف $أب$ ، $م ص \perp أج$
المطلوب: إثبات أن:
أولاً: $س ك = ص هـ$
ثانياً: $ق = (\triangle م س ب) = ق = (\triangle م س ص ج)$

مسألة ٤

البرهان: \therefore م منتصف \overline{AB} \therefore م س \perp \overline{AB} .
 \therefore $AB = AJ$ ، م س \perp \overline{AB} ، م ص \perp \overline{AJ} \therefore م س = م ص، م س = م هـ = م و.

\therefore م س = م هـ = م ص \therefore م س = م هـ = م و (المطلوب أولاً)

(١) في $\triangle م س ص$: \therefore م س = م ص \therefore $\angle م س ص = \angle م ص م$ \therefore $\angle م س ص = \angle م ص م$ (١)

(٢) \therefore م س \perp \overline{AB} ، م ص \perp \overline{AJ} \therefore $\angle م س ب = \angle م ص ج = 90^\circ$ (٢)

من (١) و (٢) ينتج أن: $\angle م س ب = \angle م ص ج$ (وهو المطلوب ثانياً)

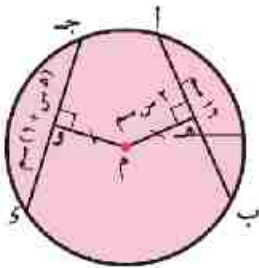
عكس النظرية

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون متساوية في الطول.

أجب عن الأتي في كراسة الفصل:



ادرس الشكل ثم أكمل:

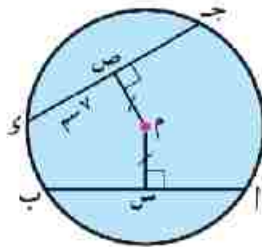


٢ إذا كان:

م هـ = م و

فاوجد:

طول \overline{AB}



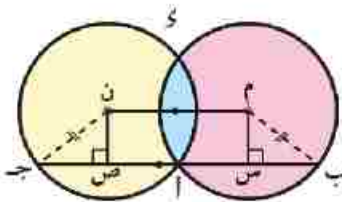
١ إذا كان:

م س = م ص،

ص و = م هـ

فاوجد:

طول \overline{AB}



٣ إذا كان:

٣ إذا كان:

م س = م هـ

$\angle م س ب = 65^\circ$

فاوجد:

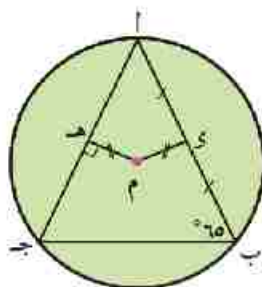
$\angle م ص ج$

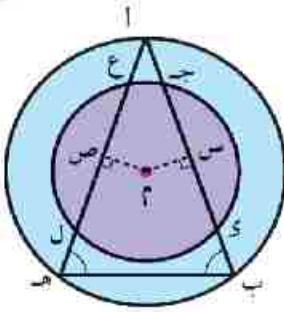
الدائرة م \cap الدائرة ن = $(س، و)$ ،

م ب = ن ج،

$\overline{م ن} \parallel \overline{ب ج}$

أثبت أن: $AB = AJ$





أمثلة



٥ دائرتان متحدتا المركز م، رسم \overline{AB} وترًا في الدائرة الكبرى ففقطع الدائرة الصغرى في ج، د، ورسم $\overline{Aهـ}$ وترًا في الدائرة الكبرى أيضًا ففقطع الدائرة الصغرى في ع، ل، إذا كان $\angle(أ ب هـ) = \angle(أ هـ ب)$ ، فاثبت أن: ج د = ع ل.

الحل

المعطيات: $\angle(أ ب هـ) = \angle(أ هـ ب)$

المطلوب: إثبات أن ج د = ع ل

العمل: نرسم م س \perp أ ب، م ص \perp أ هـ

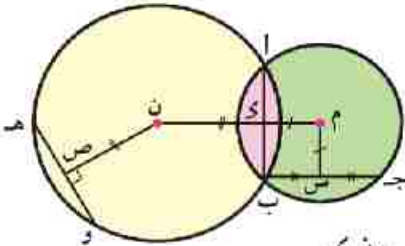
البرهان: في Δ أ ب ج: $\angle(أ ب هـ) = \angle(أ هـ ب)$ \therefore أ ب = أ هـ (برهانًا)

في الدائرة الكبرى: \therefore أ ب = أ هـ (برهانًا)

في الدائرة الصغرى: \therefore م س = م ص (برهانًا)

\therefore ج د = ع ل (عكس النظرية)

(وهو المطلوب)



٦ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب،

$\overline{MN} \cap \overline{AB} = \{K\}$ ، س منتصف ب ج، ن ص \perp هـ و،

م س = م د، ن ص = ن د. اثبت أن: ب ج = هـ و.

الحل

المعطيات: س منتصف ب ج، ن ص \perp هـ و، م س = م د، ن ص = ن د.

المطلوب: إثبات أن: ب ج = هـ و

البرهان: \therefore م ن خط المركزين، أ ب وتر مشترك للدائرتين م، ن. \therefore م ن \perp أ ب

في الدائرة م: \therefore س منتصف ب ج \therefore م س \perp أ ب ج

\therefore م س \perp أ ب ج، م د \perp أ ب، م س = م د

\therefore ب ج = أ ب (عكس النظرية) (١)

في الدائرة ن: \therefore ن ص \perp هـ و، ن د \perp أ ب، ن ص = ن د

\therefore هـ و = أ ب (عكس النظرية) (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن: ب ج = هـ و (وهو المطلوب)

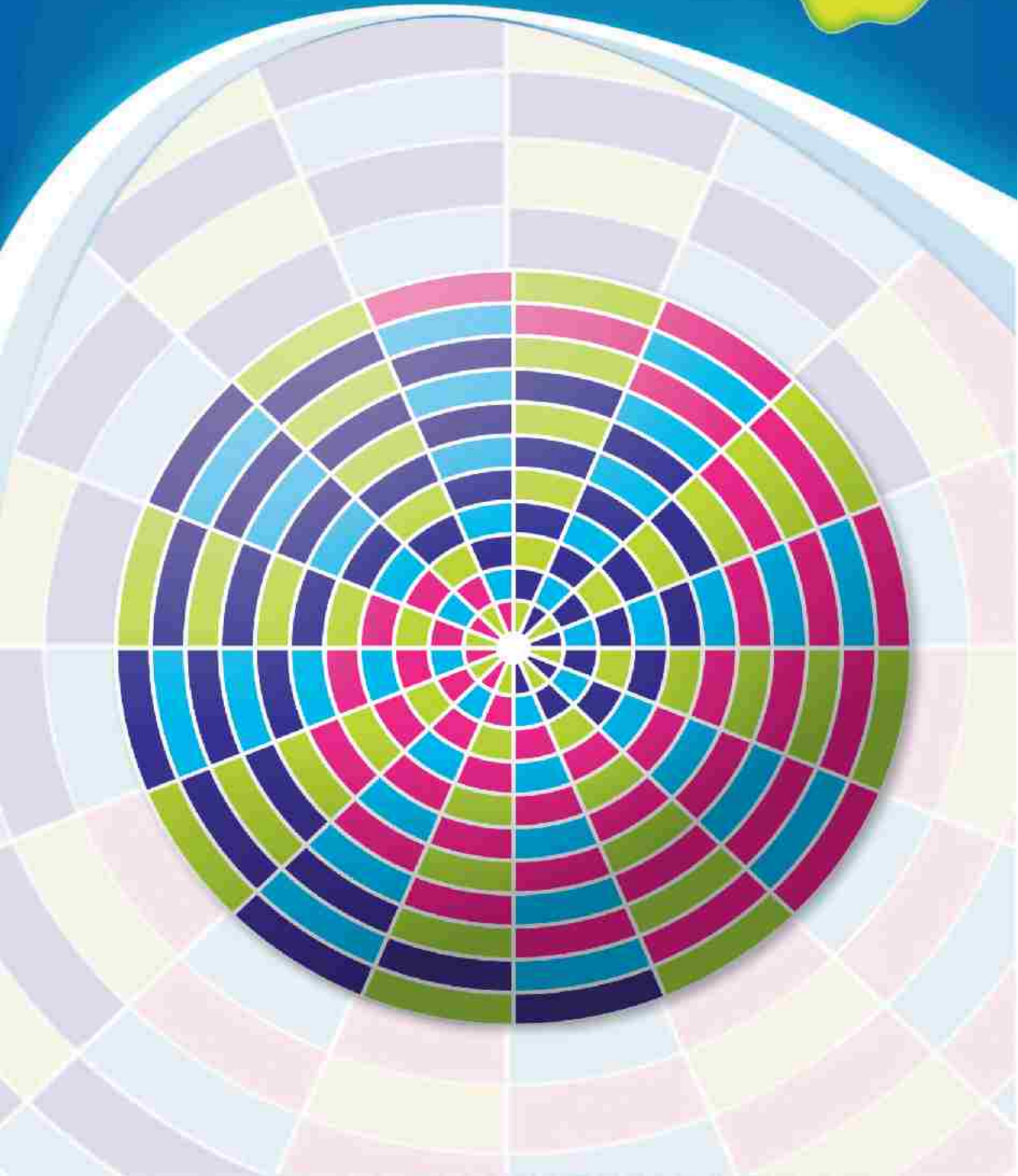
نصير إذا كانت م، ن دائرتين متطابقتين ومتقاطعتين في أ، ب: فهل أ ب محور م ن؟



فسر إجابتك.

الوحدة الخامسة: الزوايا والأقواس في الدائرة

الهندسة



الزاوية المركزية وقياس الأقواس

فكر وناقش

في الشكل المقابل:

ضلعا \triangle م ب يقسمان الدائرة م إلى قوسين:

١ القوس الأصغر $\widehat{أ ب}$ ، ويرمز له بالرمز $\widehat{أ ب}$.

٢ القوس الأكبر $\widehat{أ ج ب}$ ، ويرمز له بالرمز

$\widehat{أ ج ب}$.

♦ ما موقع نقط $\widehat{أ ب}$ بالنسبة إلى \triangle م ب؟

♦ ما موقع نقط $\widehat{أ ج ب}$ بالنسبة إلى \triangle م ب المنعكسة؟

♦ إذا كانت \triangle م ب زاوية مستقيمة ماذا تلاحظ؟

هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة، ويحمل كل من ضلعيها نصف قطر في الدائرة.

**الزاوية
المركزية**

في الشكل المقابل لاحظ أن:

١ \triangle م ب المركزية يقابلها $\widehat{أ ب}$ ، $\widehat{أ ج ب}$

يقابل \triangle م ب المركزية المنعكسة.

٢ إذا كانت \triangle م ب زاوية مستقيمة

($\widehat{أ ب}$ قطر في الدائرة م) فإن $\widehat{أ ب}$ يطابق

$\widehat{أ ج ب}$ ويسمى كل منهما "نصف دائرة"

هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له.

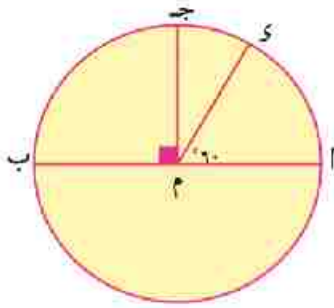
قياس القوس

سوف تتعلم

- ☆ مفهوم طول القوس
- ☆ مفهوم قياس القوس
- ☆ كيفية إيجاد العلاقة بين أوتار في الدائرة وأقواسها

مصطلحات أساسية

- ☆ زاوية مركزية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ قوس.
- ☆ قوسان متجاوران.
- ☆ قياس قوس.
- ☆ وتر.
- ☆ مماس.



في الشكل المقابل :

AB قطر في الدائرة م، م ج \perp AB، و $\angle AMD = 60^\circ$

لاحظ أن :

١ و $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 60^\circ$ و $\angle AMD = 60^\circ$

٢ و $\widehat{AB} = \widehat{DB} = 90^\circ$ و $\angle BMD = 90^\circ$

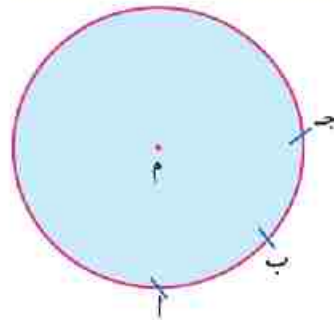
(لماذا)

٣ و $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 30^\circ$ و $\angle AMD = 30^\circ$

٤ و $\widehat{AB} = \widehat{DB} = 180^\circ$ و $\angle AMB = 180^\circ$

أي أن قياس نصف الدائرة = 180° ويكون قياس الدائرة = 360°

القوسان المتجاوران هما قوسان من دائرة يشتركان في نقطة واحدة فقط.

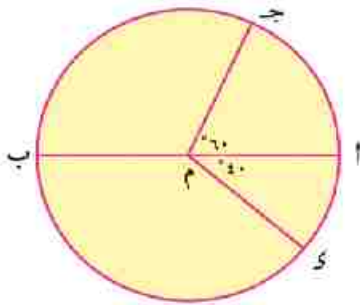


مثل AB، ب ج بالشكل المقابل :

ويكون :

و $\widehat{AB} + \widehat{BC} = \widehat{AC}$ و $\angle AOB = \angle AOC$

و $\widehat{AB} - \widehat{BC} = \widehat{AC}$ و $\angle AOB = \angle AOC$



في الشكل المقابل :

AB قطر في الدائرة م، و $\angle AMD = 60^\circ$ ، و $\angle BMC = 40^\circ$

لاحظ أن :

١ و $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 40^\circ$ و $\angle AMD = 40^\circ$

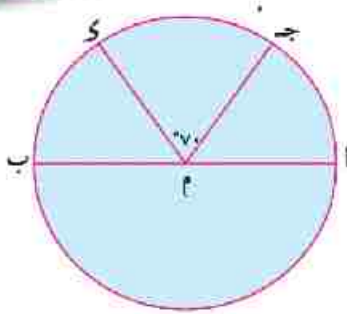
٢ و $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 10^\circ$ و $\angle AMD = 10^\circ$

$100^\circ = 40^\circ + 60^\circ$

(لماذا؟)

٣ و $\widehat{AB} = \widehat{DB} = 120^\circ$ و $\angle AOB = 120^\circ$

٤ و $\widehat{AD} = \widehat{DB} = 220^\circ$ و $\angle AOB = 220^\circ$



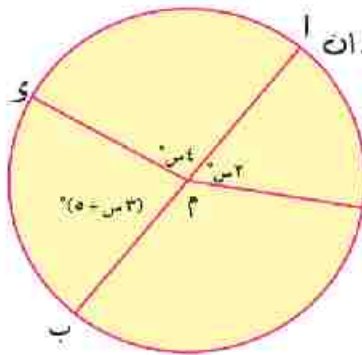
مسألة (١)

أب قطر في الدائرة م، و \angle ج م س = 70° ،
و (أ ج) = 5° و (ب ج) = 6° أوجد و (أ ج س).

الحل

بفرض أن و (أ ج) = 5° و (ب ج) = 6° ∴
∴ و (أ ب) = و (أ ج) + و (ج س) + و (ب ج) = 180°
∴ $5^\circ + 70^\circ + 6^\circ + 5^\circ + 6^\circ + 5^\circ = 180^\circ$ ∴ س = 11°
∴ و (أ ج س) = و (أ ج) + و (ج س) = $70^\circ + 5^\circ = 120^\circ$

تدريب



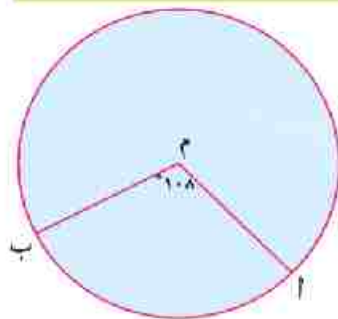
في الشكل المقابل: أب قطر في الدائرة م، ادرس الشكل ثم لاحظ ان

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| ١ س = 5° | ٢ و (أ ج) = 5° |
| ٣ و (أ س) = 10° | ٤ و (ب ج) = 13° |
| ٥ و (ج أ س) = 15° | ٦ و (ج ب س) = 21° |
| ٧ و (أ ج س) = 26° | ٨ و (أ س ج) = 31° |

هو جزء من محيط دائرته يتناسب مع قياسه حيث:

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$$

طول القوس



مسألة (٢)

في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم، و \angle أ ب = 108° .
أوجد طول أ ب $(\pi = 3,14)$

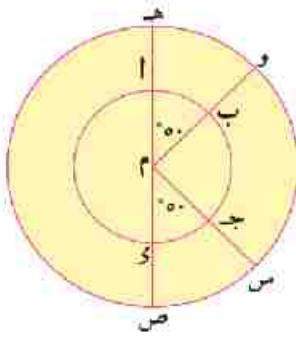
الحل

$$= \frac{108}{360} \times 2 \times 3,14 \times 5 = 9,42 \text{ سم}$$

$$\text{طول القوس} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} \times \text{محيط الدائرة}$$



أجب عن الآتي في كراسة الفصل:



في الشكل المقابل: دائرتان متحدتا المركز طول نصف قطر الدائرة الصغرى

7 سم وطول نصف قطر الدائرة الكبرى 14 سم ($\frac{22}{7} = \pi$)

أثبت أن: $(\widehat{AB}) \equiv (\widehat{ab})$ ، $\widehat{HO} \equiv \widehat{ho}$

الحل:

في الدائرة الصغرى:

$$\widehat{Oa} = (\widehat{ab}) = \widehat{Ob} = 50^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{ab} = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{55}{9} \text{ سم}$$

$$\text{طول } \widehat{cd} = 7 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{55}{9} \text{ سم}$$

$\therefore \widehat{ab} \equiv \widehat{cd}$ **يطابق**

في الدائرة الكبرى:

$$\widehat{HO} = (\widehat{HO}) = \widehat{HO} = 50^\circ$$

$$\text{طول } \widehat{HO} = 14 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{110}{9} \text{ سم}$$

$\therefore \widehat{HO} \equiv \widehat{HO}$ **يطابق**

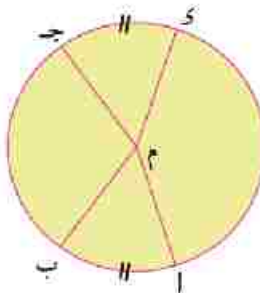
$$\text{طول } \widehat{SO} = 14 \times \frac{22}{7} \times 2 \times \frac{50}{360} = \frac{110}{9} \text{ سم}$$

- هل $\widehat{AB} \equiv \widehat{HO}$ ؟ ماذا تستنتج؟

نتائج هامة:

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة). الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول. والعكس صحيح.

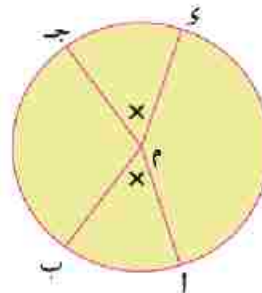
نتيجة (1)



والعكس

إذا كان: $\text{طول } \widehat{AB} = \text{طول } \widehat{CD}$

فإن: $\widehat{Oa} = \widehat{Ob} = \widehat{Oc} = \widehat{Od}$

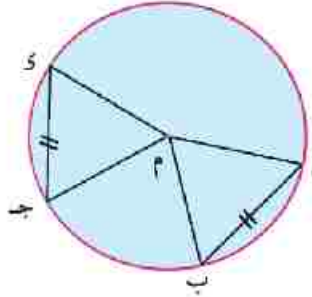


في الدائرة م

إذا كان: $\widehat{Oa} = \widehat{Ob} = \widehat{Oc} = \widehat{Od}$

فإن: $\text{طول } \widehat{AB} = \text{طول } \widehat{CD}$

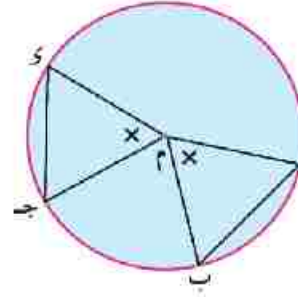
نتيجة (٢) في الدائرة الواحدة (أو الدوائر المتطابقة) ، الأقواس المتساوية في القياس أو ثارها متساوية في الطول، والعكس صحيح



والعكس

إذا كان: $AB = CD$

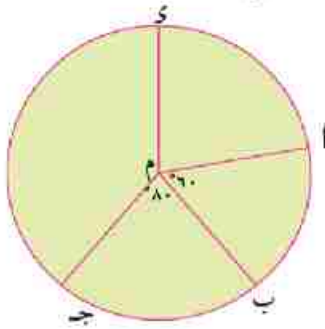
فإن: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



في الدائرة م

إذا كان: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

فإن: طول $AB =$ طول CD



٣ ارسم الأوتار المتساوية في الطول.

أجب في كراسة الفصل



في الشكل المقابل إذا كان:

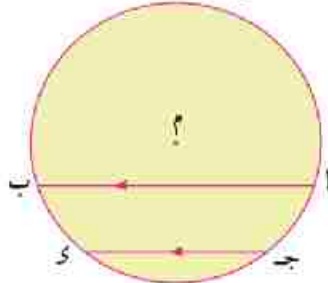
و $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، و $\widehat{BC} = 80^\circ$ ،

و $\widehat{AD} = 70^\circ$ ، و $\widehat{DE} = 40^\circ$ ،

١ اذكر الأقواس المتساوية في القياس.

٢ اذكر الأقواس المتساوية في الطول.

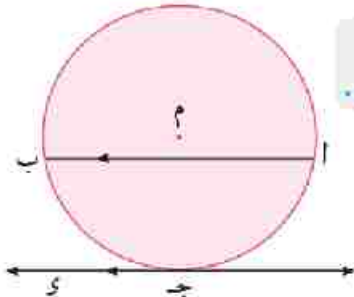
نتيجة (٣) الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.



إذا كان $AB \parallel CD$ وترين في الدائرة م، $AB \parallel CD$

فإن $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

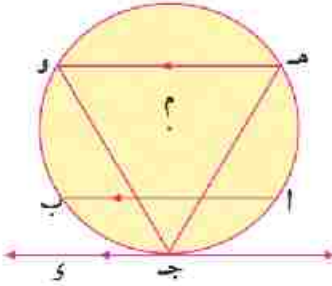
نتيجة (٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس.



إذا كان AB وترًا في الدائرة م، CD مماسًا عند ج، $AB \parallel CD$

فإن $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

مسألة (٣)



في الشكل المقابل:

م دائرة، جـي مماس للدائرة عند جـ، ا ب، هـ و وتران في الدائرة حيث:

$$\overline{ا ب} // \overline{هـ و} // \overrightarrow{جـي}$$

أثبت أن: جـه = جـو

الحل

$$\therefore \overline{ا ب} // \overline{هـ و}$$

$$\therefore \text{المماس } \overrightarrow{جـي} // \overline{ا ب}$$

بجمع طرفي (١)، (٢)

$$\therefore \widehat{ا هـ} = \widehat{ا ب و}$$

$$\therefore \widehat{ا جـا} = \widehat{ا جـ ب}$$

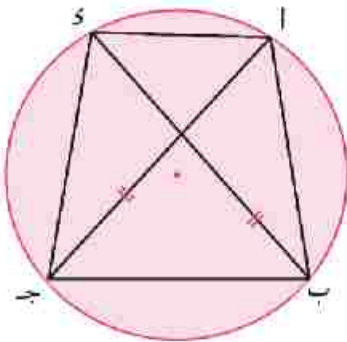
$$\therefore \widehat{هـ جـا} = \widehat{هـ جـ ب}$$

(١)

(٢)

\therefore جـه = جـو

مسألة (٤)



في الشكل المقابل:

ا ب جـي شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه ا جـ = ب د،

$$ا ب = (٥ - ٣س) سم، جـي = (٣ + س) سم.$$

اوجد بالبرهان طول ا ب .

الحل

المعطيات: ا ب جـي شكل رباعي مرسوم داخل دائرة،

$$ا جـ = ب د، ا ب = (٥ - ٣س) سم، جـي = (٣ + س) سم$$

المطلوب: إيجاد طول ا ب .

البرهان: \therefore ا جـ = ب د معطى

$$\therefore \widehat{ا ب جـ} = \widehat{ا د جـ}$$

$$\therefore \widehat{ا ب جـ} - \widehat{ا ب جـ} = \widehat{ا ب جـ} - \widehat{ا د جـ}$$

$$\therefore ا ب = جـي$$

$$\therefore \widehat{ا ب} = \widehat{ا د جـ}$$

$$\therefore ٥ - ٣س = ٣ + س$$

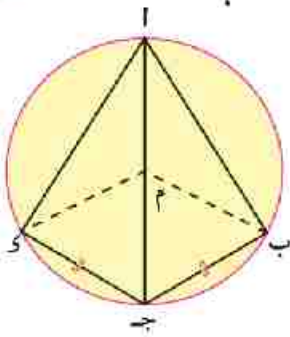
$$\therefore ا ب = جـي$$

$$\therefore ٤ = س$$

$$٨ = ٣س$$

$$\therefore ا ب = ٥ - ٤ \times ٣ = ٧ سم$$

$$\therefore ا ب = ٥ - ٣س$$



مسألة (٥)



في الشكل المقابل:

أ ب ج د شكلٌ رباعيٌّ مرسومٌ داخلَ دائرةٍ م، أ ج قطرٌ في الدائرة،
ج ب = ج د **أثبت أن:** $\widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د}$

الحل

المعطيات: أ ج قطرٌ في الدائرة، ج ب = ج د

المطلوب: $\widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د}$

البرهان: ∴ ج ب = ج د

$$\text{∴ } \widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د} \text{ ————— (١)}$$

∴ أ ج قطرٌ في الدائرة

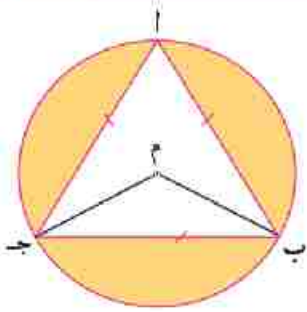
$$\text{∴ } \widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د} - ١٨٠ \text{ ————— (ج ب)}$$

$$\text{∴ } \widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د} - ١٨٠ \text{ ————— (٢)}$$

من (١)، (٢) ينتج أن:

$$\widehat{ب م ج} = \widehat{ب ج د}$$

العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس



فكر وناقش

في الشكل المقابل:
الدائرة م تمر برؤوس المثلث أ ب ج
المتساوي الأضلاع

♦ ما قياس \angle ب م ج المركزية؟

فَسِّرْ إجابتك

♦ ما رأس \angle ب أ ج؟

هل ينتمي رأس الزاوية إلى مجموعة نقط الدائرة م؟

♦ ما ضلع \angle ب أ ج؟

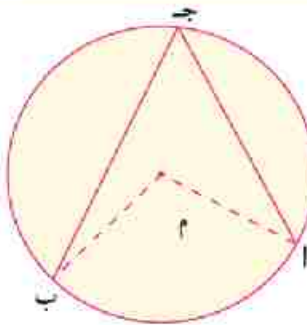
♦ إذا كانت \angle ب م ج مركزية قوسها ب ج، فكيف تصف \angle ب أ ج؟

♦ قارن بين \angle (ب أ ج)، و \angle (ب م ج). ماذا تلاحظ؟

هي الزاوية التي رأسها على الدائرة، ويحمل
كل ضلع من ضلعيها وترًا في الدائرة.

الزاوية

المحيطة



في الشكل المقابل: لاحظ أن:

١ \angle أ ج ب زاوية محيطية ويكون $\widehat{أ ب}$
هو القوس المقابل لها.

٢ لكل زاوية محيطية توجد زاوية
مركزية واحدة تشترك معها في القوس.

فكر

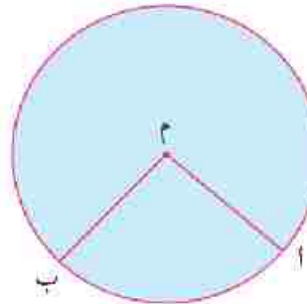


في الشكل المقابل

ما عدد الزوايا المحيطية التي تشترك

مع \angle أ م ب المركزية في $\widehat{أ ب}$ ؟

(وَضِّحْ إجابتك بالرسم)



سوف نتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة بين

قياس الزاويتين المحيطية

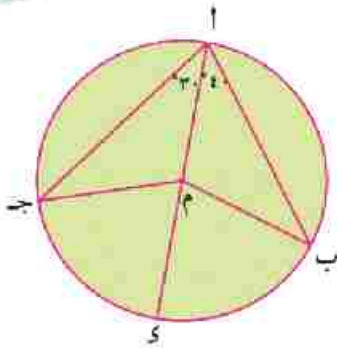
والمركزية المشتركتين في

القوس.

مصطلحات أساسية

☆ زاوية مركزية.

☆ زاوية محيطية



نشاط في الشكل المقابل:

أر قطر في الدائرة م. ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١ اذكر زوجين من الزوايا المتساوية في القياس.
- ٢ إذا كان $\widehat{C} = 40^\circ$ ، أوجد \widehat{A} و \widehat{B} .
- ٣ إذا كان $\widehat{A} = 30^\circ$ ، أوجد \widehat{C} و \widehat{B} .
- ٤ قارن بين \widehat{A} و \widehat{B} ، و \widehat{A} و \widehat{C} . ماذا تستنتج؟

نظرية قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.

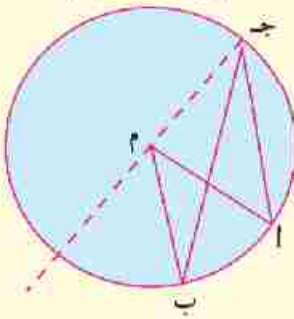
نظرية

المعطيات: $\triangle ABC$ زاوية محيطية، $\triangle AMB$ زاوية مركزية.

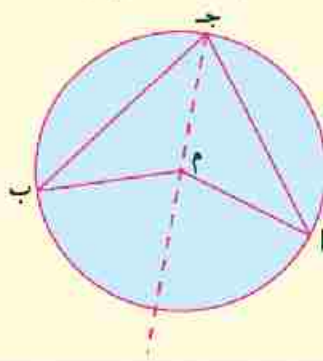
المطلوب: إثبات أن $\widehat{A} = \frac{1}{2} \widehat{B}$ و $\widehat{C} = \frac{1}{2} \widehat{A}$.

البرهان: توجد ثلاث حالات لإثبات صحة النظرية.

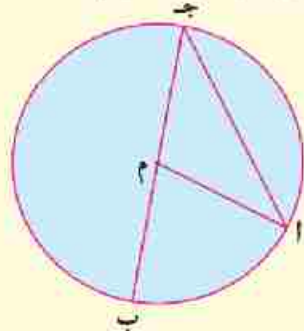
٣ إذا كانت م نقطة خارج الزاوية المحيطية.



٢ إذا كانت م نقطة داخل الزاوية المحيطية.



١ إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية.



الحالة الأولى: إذا كانت م تنتمي إلى أحد ضلعي الزاوية المحيطية.

$\triangle AMB$ خارج عن $\triangle AMC$

$\widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{C}$ و $\widehat{A} = \widehat{C} + \widehat{B}$

١

٢

$\widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{B} = \widehat{A}$ و $\widehat{C} = \widehat{B}$ (أطوال أنصاف أقطار)

من ١، ٢ يتبع أن $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$ و $\widehat{A} = \widehat{B}$

(وهو المطلوب)

$\widehat{A} = \frac{1}{2} \widehat{B}$ و $\widehat{C} = \frac{1}{2} \widehat{A}$

برهن صحة النظرية في الحالتين الأخريين .



في كلٍّ من الأشكال الآتية، م دائرة، أوجد قيمة الرمز المجهول المستخدم في القياس :
(س، ص، ع، ل).

10 numbered diagrams (1-10) showing circles with inscribed triangles and various angles and segments labeled for measurement. Each diagram includes a green circle with a number (1-10) and a corresponding circle with geometric elements and labels.

- 1. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 110°. Angle at vertex ب is 70°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 2. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 40°. Angle at vertex ب is 110°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 3. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 70°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 4. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 110°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 5. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 40°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 6. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 40°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 7. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 80°. Angle at vertex ب is 15°. Angle at vertex ا is 15°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 8. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 50°. Angle at vertex ب is 50°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 9. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 130°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.
- 10. Circle with inscribed triangle. Angle at vertex ج is 50°. Angle at vertex ب is 30°. Angle at vertex ا is 30°. Segment م is drawn from vertex ج to the base.

مسألة (١)

انقطة خارج الدائرة م، \overline{AB} مماس للدائرة عند ب، \overline{AM} قطع الدائرة م في ج، \overline{CS} على الترتيب، $\angle A = 40^\circ$ و $\angle C = 90^\circ$ **أوجد** بالبرهان $\angle B$ و $\angle S$.

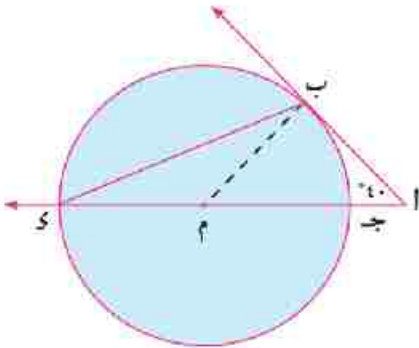
الحل

المعطيات: \overline{AB} مماس للدائرة عند ب، $\angle A = 40^\circ$ ، \overline{AM} قطع الدائرة م في ج، \overline{CS} .

المطلوب: $\angle B$ و $\angle S$.

العمل: نرسم نصف القطر \overline{BM} .

البرهان: $\therefore \overline{AB}$ مماس للدائرة عند ب، \overline{BM} نصف قطر.



$\therefore \angle ABM = 90^\circ$

في $\triangle ABM$:

$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

$\therefore \angle C = 90^\circ$ و $\angle A = 40^\circ$ في $\triangle ABC$ $\therefore \angle B = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$

$\therefore \angle S$ و $\angle C$ المحيطية، $\angle B$ و $\angle M$ المركزية مشتركتان في \widehat{BC} .

$\therefore \angle S = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ$

$\therefore \angle S = 25^\circ$ و $\angle B = 50^\circ$

(وهو المطلوب)

مسألة (٢)

في الشكل المقابل: \overline{AB} وتر في الدائرة م، $\overline{M} \perp \overline{AB}$.

أثبت أن: $\angle A = \angle B$ و $\angle C = \angle D$

الحل

نرسم \overline{BM} ، في $\triangle MAB$:

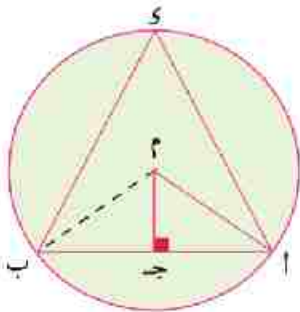
$\therefore \angle M = 90^\circ$ و $\overline{BM} \perp \overline{AB}$

$\therefore \angle A = \angle B$ و $\angle C = \angle D$ و $\angle E = \angle F$

$\therefore \triangle MAB$ و $\triangle MCB$ المحيطية، $\angle A$ و $\angle C$ المركزية مشتركتان في \widehat{AB}

$\therefore \angle A = \angle C$ و $\angle B = \angle D$

من (١) و (٢) **ينتج أن:** $\angle A = \angle B$ و $\angle C = \angle D$.

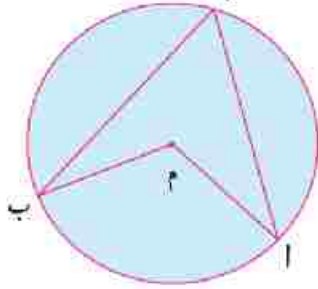


١

٢

نتيجة (١) قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها

نتيجة (١)



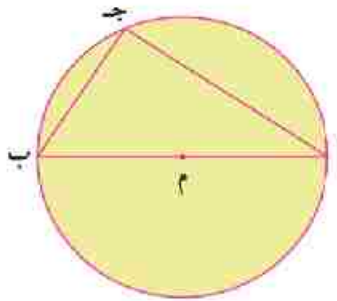
في الشكل المقابل:

$$\text{و } (\Delta ج) = \frac{1}{2} \text{ و } (\Delta م ب)، \text{ و } (\Delta م ب) = \widehat{أ ب}$$

$$\therefore \text{ و } (\Delta ج) = \frac{1}{2} \text{ و } (\Delta م ب)$$

نتيجة (٢) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة

نتيجة (٢)



أى أن:

إذا كان القوس المقابل للزاوية المحيطية يساوى نصف الدائرة

$$\text{فإن: و } (\Delta ج) = \frac{1}{2} \text{ و } (\Delta م ب)$$

$$\therefore \text{ و } (\Delta م ب) = 180^\circ \quad \therefore \text{ و } (\Delta ج) = 90^\circ$$

◆ ما نوع الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أصغر من نصف دائرة؟ لماذا؟



◆ ما نوع الزاوية المحيطية التي تقابل قوساً أكبر من نصف دائرة؟ لماذا؟

◆ هل الزاوية المحيطية القائمة تكون مرسومة في نصف دائرة؟ فسر إجابتك.

مثال (٣)

في الشكل المقابل: أ ب ج مثلث مرسوم داخل الدائرة م، و (أ ب) : و (ب ج) : و (أ ج) = ٣ : ٥ : ٤

أوجد و (أ ج ب) :

الحل

نفرض أن:

$$\text{و } (\Delta م) = 4س، \text{ و } (\Delta ب ج) = 5س، \text{ و } (\Delta أ ج) = 3س$$

$$\therefore 360 = 4س + 5س + 3س$$

$$\therefore 30 = س$$

$$120 = 4س$$

$$\therefore \text{ و } (\Delta م) = 120 = 30 \times 4 \text{ ويقابل } \Delta أ ج ب \text{ المحيطية.}$$

$$\therefore \text{ و } (\Delta أ ج ب) = \frac{1}{2} \text{ و } (\Delta م) \quad \therefore \text{ و } (\Delta أ ج ب) = \frac{1}{2} \times 120 = 60^\circ$$



ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قياس الزاوية أو القوس المطلوب في كل شكل:

١ أوجد: س، و (أب)

٢ أوجد: و (أ)، و (أج)

٣ أوجد: و (أج)، و (أب)

٤ أوجد: و (أج)

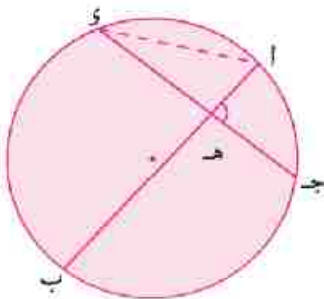
٥ أوجد: و (أهـ أ ج)

٦ أوجد: و (أ ب ج ب)



تعرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران في نقطة داخل الدائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف مجموع قياسي القوسين المقابلين لها.



الحل

المعطيات: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \text{هـ}$

المطلوب: و (أهـ أ ج) = $\frac{1}{2}$ و (أج) + و (ب ب)

العمل: نرسم أ ب

البرهان: Δ أهـ أ ج خارجة عن Δ أهـ أ ب

$$\therefore \text{و (أهـ أ ج)} = \text{و (أ ب)} + \text{و (أ ج)} = \frac{1}{2} \text{ و (أ ب)} + \text{و (أ ج)}$$

$$= \frac{1}{2} [\text{و (أ ب)} + \text{و (أ ج)}]$$

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين في دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي نصف قياس القوس الأكبر مطروحاً منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

الحل

المعطيات: $\overline{أب} \cap \overline{جى} = هـ$

المطلوب: $\widehat{هـ} = \frac{1}{2} [\widehat{أج} - \widehat{بى}]$

العمل: نرسم $\overline{بج}$.

البرهان: $\Delta أبج$ خارجة عن $\Delta ب هـ ج$.

$$\therefore \widehat{هـ} + \widehat{أبج} = \widehat{أج} + \widehat{ب هـ ج}$$

$$\therefore \widehat{هـ} = \widehat{أج} - \widehat{أبج} + \widehat{ب هـ ج}$$

$$= \frac{1}{2} \widehat{أج} - \frac{1}{2} \widehat{بى}$$

$$= \frac{1}{2} [\widehat{أج} - \widehat{بى}]$$

وهو المطلوب



في كل من الأشكال الآتية.

٣

أوجد قيمة $\widehat{ع}$

٢

أوجد قيمة $\widehat{ص}$

١

أوجد قيمة $\widehat{س}$

٦

أوجد قيمة $\widehat{ع}$

٥

أوجد قيمة $\widehat{ص}$

٤

أوجد قيمة $\widehat{س}$

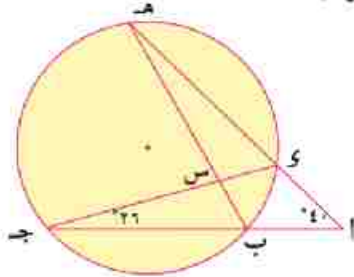
مثال ٦

في الشكل المقابل:

جدب \cap هـ \parallel ا، و $(\Delta) = 40^\circ$ ، و $\overline{ب هـ} \cap \overline{ج د} = س$ ، و $(\Delta ب ج د) = 26^\circ$
 أوجد: ١) و $(ج هـ)$ ب) و $(\Delta هـ س ج)$.

الحل

المعطيات: جدب \cap هـ \parallel ا، و $(\Delta) = 40^\circ$ ، و $\overline{ب هـ} \cap \overline{ج د} = س$ ، و $(\Delta ب ج د) = 26^\circ$
 المطلوب: ١) و $(ج هـ)$ ب) و $(\Delta هـ س ج)$.



البرهان: \therefore و $(\Delta ب ج د) = 26^\circ$

\therefore و $(ب د) = 26^\circ$ و $(\Delta ب ج د) = 52^\circ$

\therefore جدب \cap هـ \parallel ا

\therefore و $(\Delta) = \frac{1}{2} [(ج هـ) - (ب د)]$

$\therefore \frac{1}{2} [(ج هـ) - 26] = 40$

و $(ج هـ) = 52 + 26 = 78^\circ$

(وهو المطلوب أولاً)

\therefore و $\overline{ب هـ} \cap \overline{ج د} = س$ \therefore و $(\Delta هـ س ج) = \frac{1}{2} [(ج هـ) + (ب د)]$

(وهو المطلوب ثانياً)

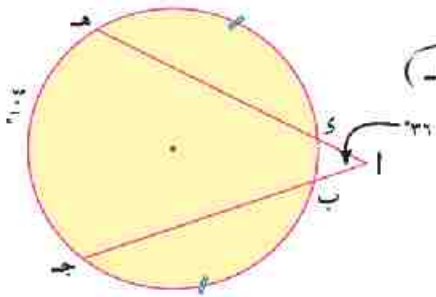
و $(\Delta هـ س ج) = \frac{1}{2} [78 + 26] = 52 \times \frac{1}{2} = 26$

مثال ٧

في الشكل المقابل:

و $(\Delta) = 36^\circ$ ، و $(هـ ج) = 104^\circ$ ، و $(ب ج) = (د هـ)$ و $(د هـ)$ ب) و $(ب د)$ أوجد: ١) و $(ب د)$

الحل



أكمل: \therefore جدب \cap هـ \parallel ا

\therefore و $(\Delta) = \frac{1}{2} [(ج هـ) - (ب د)]$

(المطلوب أولاً)

$\therefore \frac{1}{2} [104 - (ب د)] = 36$

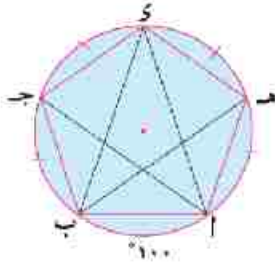
$\therefore (ب د) + 104 = 72 + (ب د)$

$\therefore (د هـ) = (ب ج)$

(المطلوب ثانياً)

$\therefore (د هـ) = 224^\circ$

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس



فكر وناقش

في الشكل المقابل : $\alpha = 100^\circ$

♦ هل تحصر الزوايا المحيطية Δ ا ه ب ،

Δ ا ز ب ، Δ ا ج ب نفس القوس؟

♦ **اوجد** α و Δ ا ه ب ، α و Δ ا ز ب ، α و Δ ا ج ب .

ماذا تلاحظ ؟

♦ هل الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متساوية في القياس، تكون

متساوية في القياس؟ فسّر إجابتك؟



سوف تتعلم

☆ كيفية استنتاج العلاقة

بين الزوايا المحيطية التي

تحصر أقواسًا متساوية

في القياس.

نظرية ٢
الزوايا المحيطية التي تحصر نفس القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس.

نظرية

٢

المعطيات: Δ ا ج ب ، Δ ا ز ب ، Δ ا ه ب زوايا محيطية مشتركة في α ب .

المطلوب: α و Δ ا ج ب = α و Δ ا ز ب = α و Δ ا ه ب

البرهان: $\therefore \alpha$ و Δ ا ج ب = $\frac{1}{2} \alpha$ و Δ ا ب

، α و Δ ا ز ب = $\frac{1}{2} \alpha$ و Δ ا ب ،

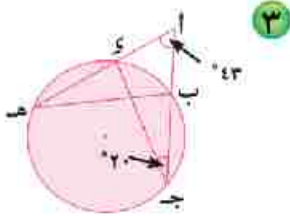
، α و Δ ا ه ب = $\frac{1}{2} \alpha$ و Δ ا ب ،

$\therefore \alpha$ و Δ ا ج ب = α و Δ ا ز ب = α و Δ ا ه ب .

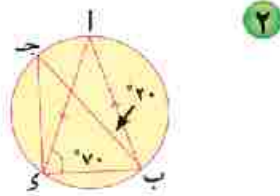
وهو المطلوب .



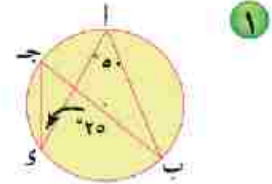
ادرس كلاً من الأشكال الآتية ثم أوجد قياسات الزوايا المبيّنة أسفل كل شكل:



٣ و $(\triangle أ ب هـ)$ ، و $(\triangle ب هـ د)$

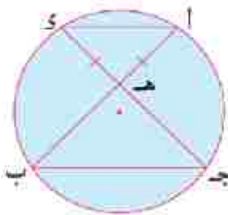


٢ و $(\triangle أ ج)$ ، و $(\triangle أ ب د)$



١ و $(\triangle أ ب)$ ، و $(\triangle أ ج)$

مسألة (١)



في الشكل المقابل:

$$\overline{أ ب} \cap \overline{ج د} = {هـ}، هـ أ = هـ د$$

أثبت أن: هـ ب = هـ ج.

الحل

١ في $\triangle أ هـ د$ $\therefore هـ أ = هـ د$ \therefore و $(\triangle أ د)$ = و $(\triangle د هـ)$

٢ \therefore و $(\triangle أ ب ج)$ ، $\triangle أ د ج$ محيطيتان تحصران $\widehat{أ ج}$ \therefore و $(\triangle أ ب) =$ و $(\triangle أ د)$

٣ \therefore و $(\triangle أ ب ج)$ ، $\triangle أ ب د$ محيطيتان تحصران $\widehat{أ ب}$ \therefore و $(\triangle أ ب ج) =$ و $(\triangle أ ب د)$

من ١، ٢، ٣ نستنتج أن: و $(\triangle أ ب) =$ و $(\triangle أ ج)$

في $\triangle هـ ب ج$: \therefore و $(\triangle أ ب) =$ و $(\triangle أ ج)$ \therefore هـ ب = هـ ج (وهو المطلوب)

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواساً متساوية في القياس في
الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) متساوية في القياس

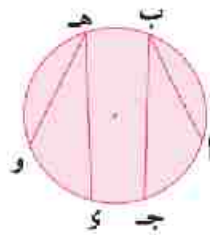
نتيجة



لاحظ أن :

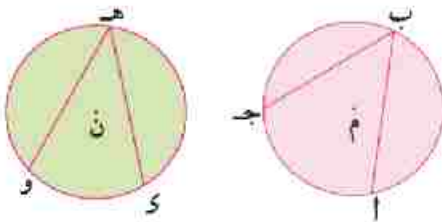
١ في الدائرة م إذا كان : $\widehat{و} = \widehat{ا ج} = \widehat{ك و}$

فإن : $\widehat{و} = \widehat{ب} = \widehat{هـ}$



٢ لأي دائرتين م، ن إذا كان : $\widehat{و} = \widehat{ا ج} = \widehat{ك و}$

فإن : $\widehat{و} = \widehat{ب} = \widehat{هـ}$



٣ عكس النتيجة السابقة صحيح ، أي أن :

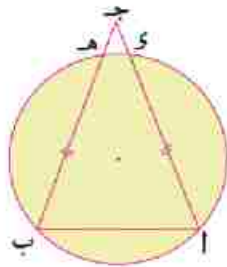
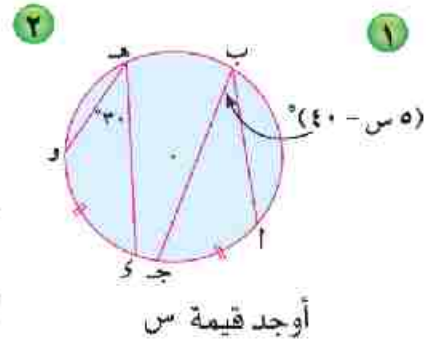
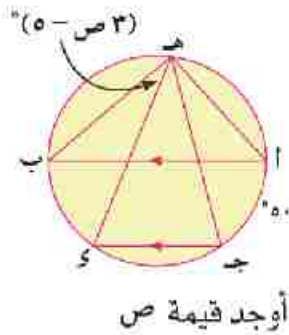
الزوايا المحيطية المتساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في عدة دوائر) تحصر أقواساً متساوية في القياس .

فكر هل كل وترين لا يتقاطعان داخل الدائرة ، ويحصران قوسين متطابقين. متوازيين ؟ فسر إجابتك





في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :



مثال (٢)

في الشكل المقابل:

أى ، ب ه وتران متساويان في الطول في الدائرة، أى \cap ب ه = ج ه.

أثبت أن: ج د = ج ه.

الحل

المعطيات: أى = ب ه

المطلوب: إثبات أن: ج د = ج ه

البرهان: \therefore أى = ب ه

بإضافة وه (ك ه) لكل من الطرفين ينتج أن:

$$\therefore \text{وه (أى)} = \text{وه (ب ه)}$$

$$\text{وه (أى ه)} = \text{وه (ب ه د)}$$

$$\therefore \text{وه (أ ب)} = \text{وه (أ د)}$$

(نتيجة)

١ \therefore أ ج = ب ج

\therefore وه (أ ب) = وه (أ د)

في Δ أ ب ج

٢

\therefore أى = ب ه

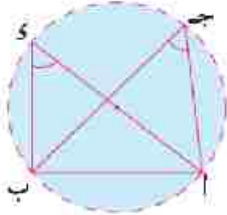
وهو المطلوب

ب طرح طرفي ٢ من ١ ينتج أن: ج د = ج ه

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفي
 جهة واحدة منها فإنه تمر براسيهما دائرة واحدة تكون هذه
 القاعدة وترًا فيها.

عكس

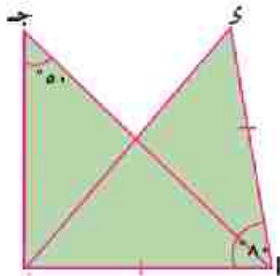
نظرية ٢



في الشكل المقابل لاحظ أن :
 $\triangle ج د$ ، $\triangle ك$ مرسومتان على القاعدة $\overline{أ ب}$ ، وفي جهة واحدة منها،
 $\text{وق } (\triangle ج د) = \text{وق } (\triangle ك د)$
فتكون : النقطة $أ$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ تمر بها دائرة واحدة، ويكون $\overline{أ ب}$ وترًا فيها.

مسألة (٤)

في الشكل المقابل : $أ ب = أ د$ ، $\text{وق } (\triangle أ ب د) = ٨٠^\circ$ ، $\text{وق } (\triangle أ ب ج) = ٥٠^\circ$.
 أثبت أن : النقطة $أ$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ تمر بها دائرة واحدة.



الحل

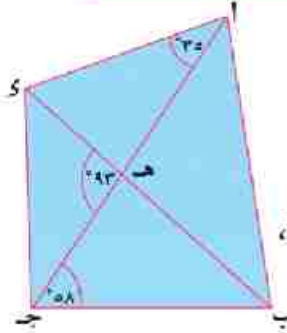
في $\triangle أ ب د$
 $\therefore أ ب = أ د$ ، $\text{وق } (\triangle أ ب د) = ٨٠^\circ$
 $\therefore \text{وق } (\triangle أ ب د) = \frac{١٨٠ - ٨٠}{٢} = ٥٠^\circ$
 $\therefore \text{وق } (\triangle أ ب ج) = ٥٠^\circ$
 وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{أ ب}$ وفي جهة واحدة منها .
 \therefore النقطة $أ$ ، $ب$ ، $ج$ ، $د$ تمر بها دائرة واحدة

الشكل الرباعي الدائري

فكر وناقش

في الشكل المقابل :

أ ب ج د شكل رباعي تقاطع قطراه في هـ ،
 $\angle ا ج ب = ٥٨^\circ$ ، و $\angle ج ا د = ٣٥^\circ$ ،
 و $\angle ج هـ د = ٩٣^\circ$.

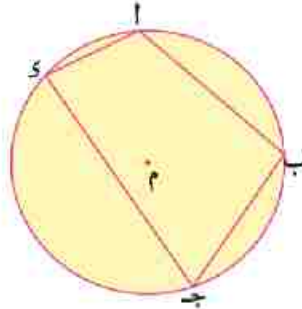


هل يمكن رسم دائرة تمر برؤوس الشكل الرباعي أ ب ج د ؟ فسر إجابتك .

الشكل الرباعي الدائري هو شكل رباعي تنتمي رؤوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

لائحة :

١ الشكل أ ب ج د رباعياً دائرياً ، لأن رؤوسه أ ، ب ، ج ، د تنتمي للدائرة م .



٢ الشكل س ص ع ل رباعياً دائرياً لأن :

$$\angle ص س ع = \angle ص ع ل$$

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة

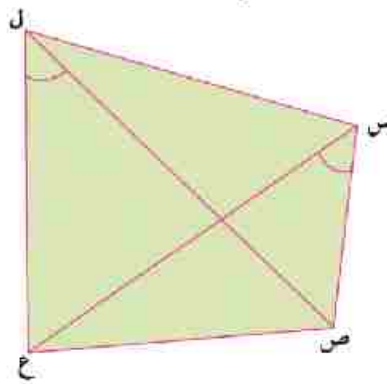
ص ع وفي جهة واحدة منها ،

فيمكن رسم دائرة تمر بالنقط

س ، ص ، ع ، ل .

أي أن رؤوس الشكل س ص ع ل

تنتمي لدائرة واحدة .



☆ مفهوم الشكل الرباعي

الدائري

☆ تحديد متى يكون الشكل

الرباعي دائرياً

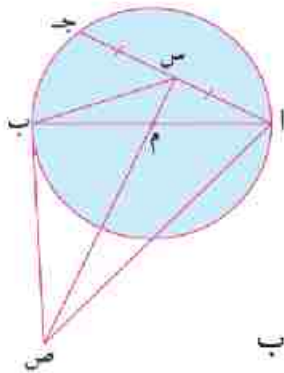
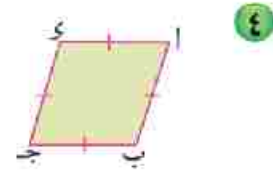
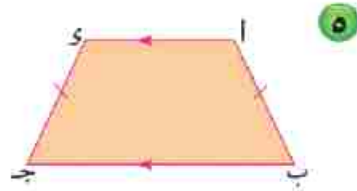
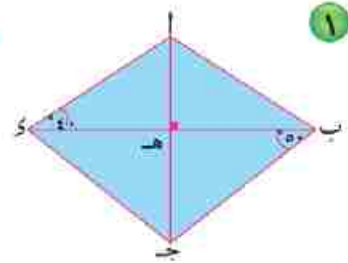
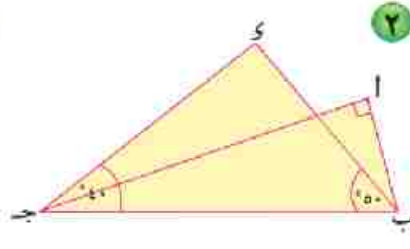
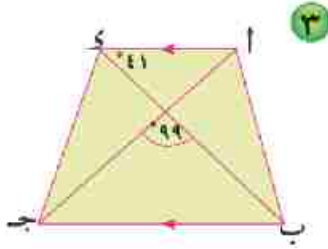
مصطلحات أساسية

☆ شكل رباعي دائري .

أجب عن السؤال الآتي في كراسة الفصل:



بيّن أى من الأشكال الآتية رباعياً دائرياً ، فسر إجابتك.



مثال (١)

في الشكل المقابل:

ا ب قطر في الدائرة م، س منتصف ا ج، س م يقطع مماس الدائرة عند ب في ص. أثبت أن: الشكل ا س ب ص رباعي دائري.

الحل

المعطيات: ا ب قطر في الدائرة م، ا س = ج س، ب ص مماس للدائرة عند ب

المطلوب: إثبات أن: ا س ب ص رباعياً دائرياً.

البرهان: ∴ س منتصف ا ج ∴ م س ⊥ ا ج، و (∠ ا س ص) = 90°

∴ ا ب قطر، ب ص مماس عند ب ∴ ب ص ⊥ ا ب، و (∠ ا ب ص) = 90°

∴ و (∠ ا س ص) = و (∠ ا ب ص) = 90°

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة ا ص وفي جهة واحدة منها.

∴ الشكل ا س ب ص رباعي دائري.

فكر في المثال السابق. أين يقع مركز الدائرة المارة برووس الشكل

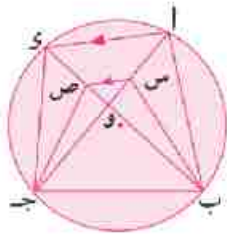


ا س ب ص؟ فسر إجابتك.

مسألة (٢)

أ ب ج د شكل رباعي دائري تقاطع قطراه في و، \exists أ و، \exists ص \exists د و حيث $\overline{س ص} // \overline{أ د}$.
أثبت أن: **أولاً:** الشكل ب س ج د رباعي دائري.

ثانياً: $\widehat{ق} = \widehat{س ب ص} = \widehat{س ج ص}$



الحل

المعطيات: أ ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة $\overline{س ص} // \overline{أ د}$

المطلوب: إثبات أن: **أولاً:** الشكل ب س ج د رباعي دائري.

ثانياً: $\widehat{ق} = \widehat{س ب ص} = \widehat{س ج ص}$

البرهان: $\therefore \overline{س ص} // \overline{أ د}$

بالتناظر

$\therefore \widehat{ق} = \widehat{س ج د} = \widehat{س ج ص}$

محيطيتان مشتركتان في ج د

$\therefore \widehat{ق} = \widehat{س ج د} = \widehat{س ج ب}$

$\therefore \widehat{ق} = \widehat{س ج ص} = \widehat{س ج ب}$

وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة ج د وفي جهة واحدة منها.

(وهو المطلوب أولاً)

\therefore الشكل ب س ج د رباعي دائري

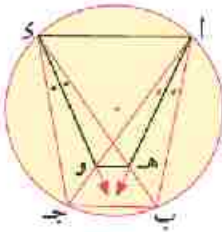
(إثباتاً)

\therefore الشكل ب س ج د رباعي دائري

$\therefore \widehat{ق} = \widehat{س ب ص} = \widehat{س ج ص}$

(وهو المطلوب ثانياً)

لأنهما زاويتان محيطيتان مشتركتان في س ص.



في الشكل المقابل :

أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه :

أ هـ ينصف ب ج ، و د ينصف ب ج ،

أثبت أن : **أولاً** : أ هـ و د رباعي دائري .

ثانياً : هـ و // ب ج .

المعطيات : أ ب ج د شكل رباعي دائري

أ هـ ينصف ب ج ، و د ينصف ب ج

المطلوب إثبات أن :

أولاً : أ هـ و د رباعي دائري

ثانياً : هـ و // ب ج

البرهان

$$(١) \quad \widehat{ق(د ب أ ج)} = \widehat{ق(د ب هـ ج)} \quad \text{محيطيتان مشتركتان في ب ج}$$

$$\therefore \widehat{أ هـ ينصف ب ج}$$

$$\therefore \widehat{ق(د هـ أ و)} = \frac{1}{2} \widehat{ق(د ب أ ج)}$$

$$(٢) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{بالمثل ق(د هـ و)} = \frac{1}{2} \widehat{ق(د ب هـ ج)} \end{array} \right.$$

(من (١) ، (٢))

$$\therefore \widehat{ق(د هـ أ و)} = \widehat{ق(د هـ و)}$$

(وهو المطلوب أولاً)

\therefore الشكل أ هـ و د رباعي دائري

$$\therefore \widehat{ق(د و هـ)} = \widehat{ق(د ج أ هـ)}$$

$$\therefore \widehat{د ج ب هـ} = \widehat{ق(د ج أ هـ)}$$

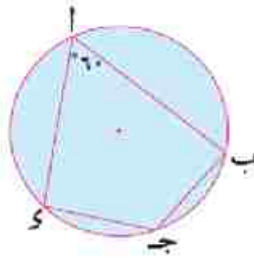
$$\therefore \widehat{ق(د و هـ)} = \widehat{ق(د ج ب هـ)} \quad \text{وهما متناظرتان}$$

$$\therefore \widehat{هـ و} // \widehat{ب ج} \quad \text{(وهو المطلوب ثانياً)}$$

خواصُّ الشَّكْلِ الرَّبَاعِيِّ الدَّائِرِيِّ

فكر وناقش

في الشكلِ المقابلِ :



وه $(\angle) = 60^\circ$ ، فإنَّ وه $(\angle \text{ج د}) = \dots\dots\dots^\circ$

♦ إذا كانَّ وه $(\angle \text{أ ب}) = \dots\dots\dots^\circ$

♦ إذا كانَّ وه $(\angle \text{ب ج}) = \dots\dots\dots^\circ$

♦ إذا كانَّ وه $(\angle \text{أ ب}) = 80^\circ$ فإنَّ وه $(\angle \text{د ج}) = \dots\dots\dots^\circ$

♦ **ماذا تلاحظُ** على مجموعِ الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري.

سوف تتعلم

☆ خواص الشكل الرباعي

الدائري.

☆ كيفية حل مسائل على

خواص الشكل الرباعي

الدائري.

مصطلحات أساسية

☆ شكل رباعي دائري.

إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.

نظرية

٣٧

المعطيات: أ ب ج د شكل رباعي دائري .

المطلوب: إثبات أن : ١ وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{ج د}) = 180^\circ$

٢ وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{د ج}) = 180^\circ$

البرهان: ∴ وه $(\angle \text{أ ب}) = \frac{1}{4}$ وه $(\angle \text{ج د})$

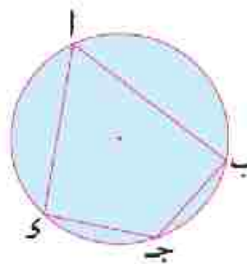
، وه $(\angle \text{ج د}) = \frac{1}{4}$ وه $(\angle \text{أ ب})$

∴ وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{ج د})$

$= \frac{1}{4} [وه (\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{ج د})]$

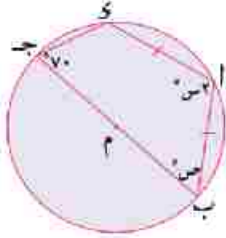
$= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 180^\circ$

بالمثل: وه $(\angle \text{أ ب}) + وه (\angle \text{د ج}) = 180^\circ$ (وهو المطلوب)

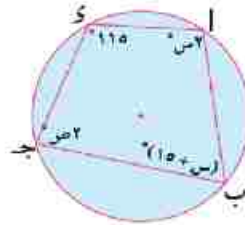




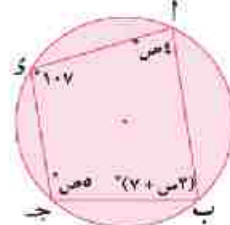
في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة s ، ص



٣



٢

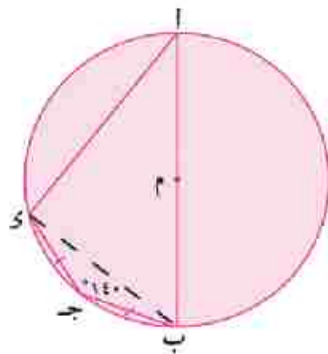


١

مثال (١)

أب جد s شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة م، $\exists \overline{AB}$ ، $\angle ب = \angle ج = s$ ، و $\angle (ب ج د) = 140^\circ$
أوجد: $\angle (ا ب ج)$ و $\angle (ا ب د)$
ثانياً: و $\angle (ا ب د)$

الحل



(نظرية)

(المطلوب أولاً)

$\angle ب = \angle ج = s$

$$\therefore \angle (ا ب ج) = \angle (ا ب د) = \frac{140 - 180}{2} = 20^\circ$$

$\therefore \angle (ا ب د) = 90^\circ$

(وهو المطلوب ثانياً)

\therefore أب جد s شكل رباعي دائري

$$\therefore \angle (ا ب ج) + \angle (ا ب د) = 180^\circ$$

$$\therefore \angle (ا ب د) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

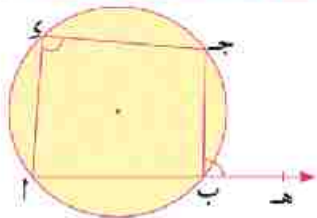
نرسم \overline{AB} ، في $\triangle ب ج د$

\therefore أب قطر في الدائرة م

$$\therefore \angle (ا ب د) = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$$

قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

نتيجة



في الشكل المقابل:

أب جد s رباعي دائري، $\exists \overline{AB}$ ، $\angle ه = \angle ا ب ج$

$\therefore \angle ه ب ج$ زاوية خارجة عن الرباعي الدائري أب جد s

، $\angle ك$ هي الزاوية الداخلة المقابلة لها.

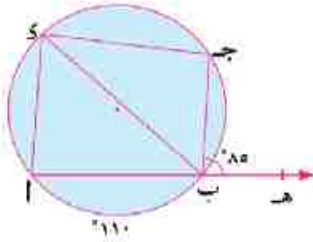
فيكون: $\angle (ه ب ج) = \angle (ا ب د)$ (مكملات الزاوية الواحدة متساوية في القياس)



مثال (٢)

في الشكل المقابل:

هـ \supset $\overline{أب}$ ، هـ \notin $\overline{أب}$ ، و $(\widehat{أب}) = 110^\circ$ ، و $(\triangle ج ب هـ) = 85^\circ$
أو هـ و $(\triangle ب ي ج)$.



الحل

\therefore و $(\widehat{أب}) = 110^\circ$ ، $\triangle أ ي ب$ زاوية محيطية قوسها $\widehat{أب}$

\therefore و $(\triangle أ ي ب) = \frac{1}{2}$ و $(\widehat{أب}) = 55^\circ$.

\therefore $\triangle ج ب هـ$ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري $أ ب ج د$

\therefore و $(\triangle ج ب هـ) =$ و $(\triangle ج ي أ) = 85^\circ$

$\triangle ب ي ج = 55^\circ - 85^\circ = 30^\circ$

(نتيجة)

(وهو المطلوب)

إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان في شكل رباعي كان هذا الشكل رباعياً دائرياً

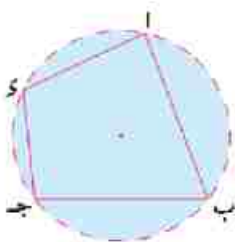
عكس
نظرية ٣

في الشكل المقابل:

إذا كان و $(\triangle أ) +$ و $(\triangle ج) = 180^\circ$

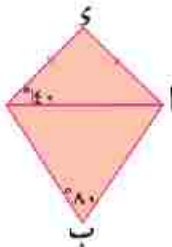
أو: و $(\triangle ب) +$ و $(\triangle د) = 180^\circ$

فيكون الشكل $أ ب ج د$ رباعياً دائرياً.

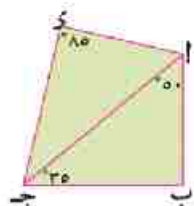


في كل من الأشكال الآتية أثبت أن الشكل $أ ب ج د$ رباعي دائري:

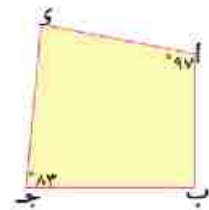
تدريب



٣



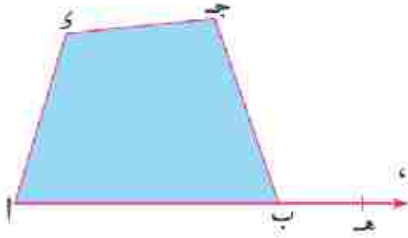
٢



١

إذا وجدت زاويةً خارجيةً عن رأس من رؤوس شكل رباعيٍّ فقياسها يساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًّا دائريًّا

نتيجة



في الشكل المقابل :

أب جدى شكل رباعي، هـ \Rightarrow أب ، هـ \nrightarrow أب

$\therefore \angle$ هـ ب ج زاوية خارجة عن الشكل الرباعي أب جدى،

\angle ك هي الزاوية الداخلة المقابلة لها.

فإذا كان \angle هـ ب ج = \angle ك = \angle ك يكون الشكل أب جدى رباعيًّا دائريًّا.

مثال (٣)

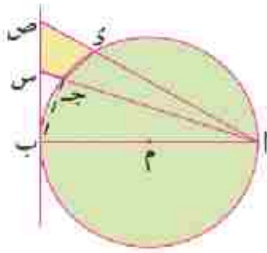


في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة م، أ ج، أى وتران فيها وفي جهة واحدة من أب

رسم من ب مماس للدائرة قطع أ ج في س، أى في ص.

أثبت أن : الشكل س ص ك جدى رباعي دائري.



الحل

نرسم ب ج \therefore أب قطر

$\therefore \angle$ (أ ب ج) = 90° ، \angle أب ج تتم \angle ب أ س

\therefore أب قطر، ب ص مماس للدائرة عند ب.

$\therefore \angle$ (أ ب س) = 90° ، \angle أ س ب تتم \angle ب أ س

من ١، ٢

$\therefore \angle$ (أ ب ج) = \angle (أ س ب)

$\therefore \angle$ ص ك ج خارجة عن الرباعي الدائري أب جدى

$\therefore \angle$ (أ س ب) = \angle (أ ب ج) = \angle (أ س ب)

$\therefore \angle$ أ س ب خارجة عن الشكل الرباعي س ص ك ج، \angle ص ك ج مقابلة لها.

\therefore الشكل س ص ك جدى رباعي دائري.

فكر متى يكون الشكل الرباعي دائريًّا؟ اذكر جميع الحالات الممكنة؟



العلاقة بين مماسات الدائرة



سوف نتعلم

- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج دائرة.
- ☆ مفهوم الدائرة الداخلة لمضلع.
- ☆ كيفية استنتاج العلاقة بين المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين.
- ☆ كيفية حل مسائل على العلاقة بين مماسات الدائرة.

مصطلحات أساسية

- ☆ وتر التماس.
- ☆ دائرة داخلة لمضلع.
- ☆ مماسات مشتركة.

فكر وناقش

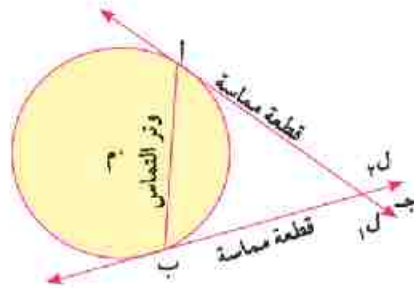
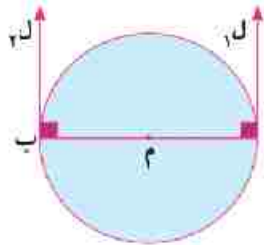
علمت أن المماسان المرسومان عند نهايتي قطر في الدائرة متوازيين .

ما العلاقة بين المماسين المرسومين عند نهايتي وتر في الدائرة لا يمر بمركزها ؟
في الشكل المقابل :

الدالة أن :

إذا كان \overline{AB} وترًا في الدائرة م ، فإن المماسين l_1 ، l_2 يتقاطعان في نقطة ج .

وتسمى كلٌّ من جـ أ ، جـ ب قطعةً مستقيمةً مماسةً ، كما تسمى \overline{AB} وتر التماس .



نظرية ٤
القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول.

المعطيات: انقطة خارج الدائرة م ،

\overline{AB} ، \overline{AJ} قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ج .

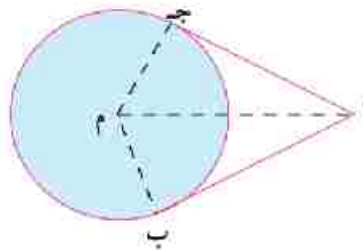
المطلوب: إثبات أن : $\overline{AB} = \overline{AJ}$

العمل: نرسم م ب ، م ج ، م أ

البرهان: ∴ \overline{AB} قطعة مماسة للدائرة م

∴ \overline{AJ} قطعة مماسة للدائرة م

∴ المثلثان $\triangle ABM$ ، $\triangle AJM$ فيهما :



$$\therefore \text{و } (\triangle ABM) = 90^\circ$$

$$\therefore \text{و } (\triangle AJM) = 90^\circ$$

(إثباتاً)

(أطوال أنصاف أقطار)

$$\therefore \triangle ابم \equiv \triangle اجم$$

(وهو المطلوب)

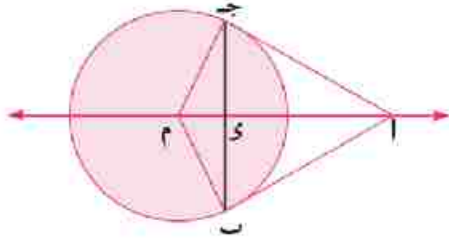
$$\therefore اب = اج$$

$$\widehat{ق} (\triangle اب) = \widehat{ق} (\triangle اج) = 90^\circ$$

$$مب = مـج$$

أم ضلع مشترك.

ويتبع أن: $\overline{اب} \equiv \overline{اج}$



في الشكل المقابل:

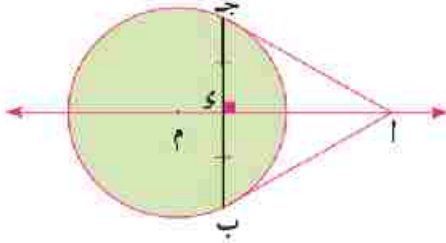
- ◆ لماذا يكون $\overline{ام}$ محور ب ج؟
- ◆ لماذا ينصف $\overline{ام}$ $\triangle اب اج$ ؟
- ◆ لماذا ينصف $\overline{ام}$ $\triangle ابم ج$ ؟



نتائج النظرية:

المستقيم المار بمركز الدائرة، ونقطة تقاطع مماسين لها يكون مموداً لوتر التماس لهذين المماسين.

نتيجة 1

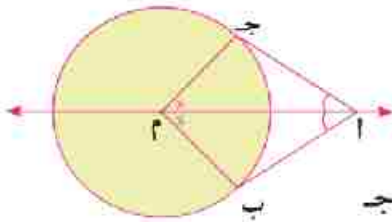


في الشكل المقابل:

- $\overline{اب}$ ، $\overline{اج}$ مماسين للدائرة م عند ب، ج.
- فإن: $\overline{ام}$ محور ب ج
- ويكون: $\overline{ام} \perp \overline{بج}$ ، $\widehat{ب} = \widehat{ج}$

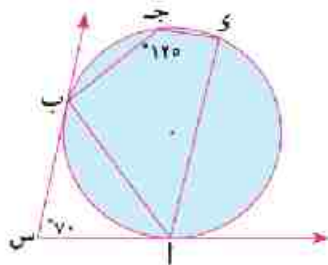
المستقيم المار بمركز الدائرة، ونقطة تقاطع مماسين لها ينصف الزاوية بين هذين المماسين. كما ينصف الزاوية بين نصفي القطرين المارين بنقطة التماس.

نتيجة 2



في الشكل المقابل:

- $\overline{اب}$ ، $\overline{اج}$ مماسان للدائرة م عند ب، ج.
- فإن: $\overline{ام}$ ينصف \triangle
- $\therefore \widehat{ق} (\triangle ابم) = \widehat{ق} (\triangle اجم)$ ، $\overline{ام}$ ينصف $\triangle ابم ج$
- $\therefore \widehat{ق} (\triangle ابم) = \widehat{ق} (\triangle اجم)$



مثال (١)

في الشكل المقابل:

س أ ، س ب مماسان للدائرة عند أ، ب .

وه \angle اس ب = 70° ، وه \angle س ج ب = 125°

أثبت أن: **أولاً:** \overline{AB} ينصف \angle س .

ثانياً: $\overline{AB} \parallel \overline{AS}$.

الحل

المعطيات: س أ ، س ب مماسان للدائرة، وه \angle اس ب = 70° ، وه \angle س ج ب = 125° .

المطلوب: **أولاً:** \overline{AB} ينصف \angle س .

ثانياً: $\overline{AB} \parallel \overline{AS}$.

البرهان: \therefore س أ ، س ب قطعتان مماستان . \therefore س أ = س ب

في \triangle س أ ب \therefore وه \angle س أ ب = وه \angle س ب أ ، وه \angle س = 70°

١

$$\therefore \text{ وه } \angle$$
 س أ ب = $\frac{180 - 70}{2} = 55^\circ$

\therefore الشكل أ ب ج د رباعي دائري، وه \angle ج = 125°

٢ (نظرياً)

$$\therefore \text{ وه } \angle$$
 د أ ب = $180 - 125 = 55^\circ$

من ١، ٢ ينتج أن: وه \angle س أ ب = وه \angle س ب أ = 55°

\therefore \overline{AB} ينصف \angle س

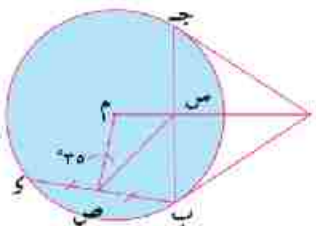
\therefore وه \angle س أ ب = وه \angle س ب أ = 55°

\therefore $\overline{AB} \parallel \overline{AS}$

(المطلوب أولاً)

وهما متبادلتان

(المطلوب ثانياً)



مثال (٢)

في الشكل المقابل:

أ ب ، أ ج قطعتان مماستان للدائرة م عند ب، ج .

م \cap ب ج = {س}، ص منتصف الوتر ب د

وه \angle س م ب = 35° .

أثبت أن: الشكل س ب ص م رباعي دائري .

ب اوجد وه \angle (أ) .

∴ $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعان مماستان للدائرة م عند ب، ج

∴ $\overline{أم}$ محور ب ج، $\angle ب س م = 90^\circ$

١

∴ $\overline{ص}$ منتصف الوتر ب ج

٢

∴ $\angle ب ص م = 90^\circ$

(وهو المطلوب أولاً)

من ١، ٢ ∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري.

نرسم $\overline{ب م}$

∴ الشكل س ب ص م رباعي دائري، $\angle ب ص م = 35^\circ$

∴ $\angle ب س م = 90^\circ$ و $\angle ب ص م = 35^\circ$

∴ $\overline{أب}$ قطعة مماسة، $\overline{م ب}$ نصف قطر

∴ $\angle ب ج م = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

∴ $\angle ب ا ج = 90^\circ$

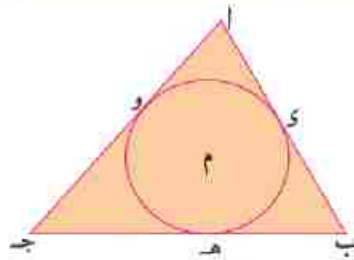
∴ $\angle ب ا ج = 55^\circ$ و $\angle ب ج ا = 55^\circ$

∴ $\overline{أب} = \overline{أج}$

(وهو المطلوب ثانياً)

∴ $\angle ب ا ج = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 70^\circ$

تعريف الدائرة الداخلة لمضلع هي الدائرة التي تلمس جميع أضلاعه من الداخل.



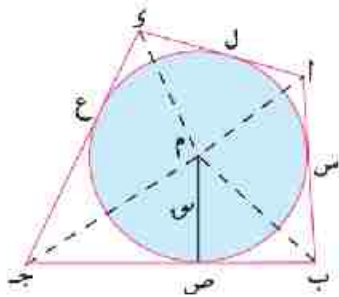
في الشكل المقابل:

م هي الدائرة الداخلة للمثلث $\overline{أب ج}$ لأنها تلمس أضلاعه من الداخل في $د$ ، $هـ$ ، و.

أي أن: المثلث $\overline{أب ج}$ مرسوم خارج الدائرة م.

فكر هل مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه

الداخلة؟ فسر إجابتك.



مسألة (٣)

في الشكل المقابل:

م دائرة داخلة للشكل الرباعي $\overline{أب ج د}$ ،

طول نصف قطرها ٥ سم، $\overline{أب} = ٩$ سم $\overline{ج د} = ١٢$ سم.

أوجد محيط الشكل $\overline{أب ج د}$ ثم احسب مساحته.

الحل

∴ الدائرة م دائرة داخلية للشكل الرباعي اب ج د

∴ الدائرة م تماس أضلاع الشكل اب ج د في س، ص، ع، ل

∴ اس، ال قطعتان مماستان للدائرة م ∴ اس = ال

∴ ب س، ب ص قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب س = ب ص

بالمثل يكون ج ع = ج د ∴ ع ي = د ل

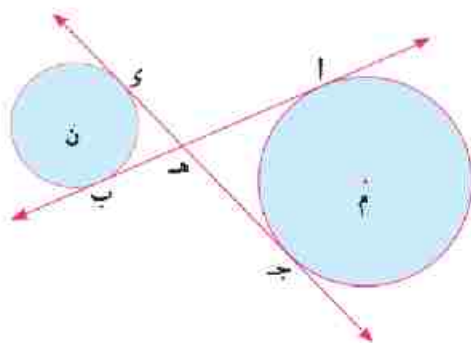
بالجمع ينتج أن: (اس + ب س) + (ج ع + د ي) = ال + ب ص + ج د + د ل

∴ اب + ج د = اى + ب ج ∴ محيط الشكل اب ج د

محيط الشكل اب ج د = $(12 + 9) \times 2 = 42$ سم،

∴ $\frac{1}{4} \times اب + \frac{1}{4} \times ب ج + \frac{1}{4} \times ج د + \frac{1}{4} \times د ا = \frac{1}{4} \times 42 = 10.5$ سم

∴ $\frac{1}{4} \times محيط الشكل = 10.5 \times 4 = 42$ سم²



المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين :

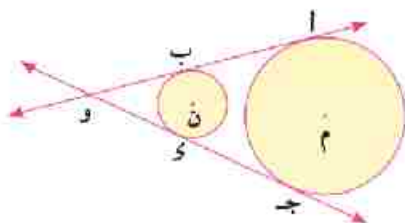
أ يسمى \overline{AB} مماس مشترك داخلي للدائرتين م، ن

لأن الدائرتين م، ن تقعان في جهتين مختلفتين

من \overline{AB} ، كما أن \overline{CD} مماس داخلي للدائرتين.

لاحظ أن: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{H\}$

في الشكل المقابل: أثبت أن: $اب = ج د$



ب يسمى \overline{AB} مماس مشترك خارجي للدائرتين م، ن،

لأن الدائرتين م، ن تقعان في جهة واحدة من \overline{AB} ،

كما أن \overline{CD} مماس خارجي للدائرتين.

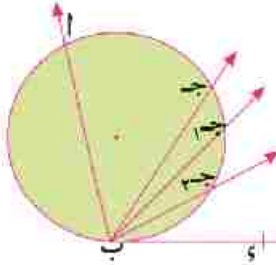
لاحظ أن: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{O\}$

في الشكل المقابل: أثبت أن: $اب = ج د$.

الزاوية المماسية

فكر وناقش

في الشكل المقابل :



\triangle α ب ج زاوية محيطية ضلعاها ب أ ،
ب ج وقوسها $\widehat{أج}$ ، ب ي مماس للدائرة
عند ب. إذا تصورنا دوران أحد ضلعي
الزاوية المحيطية، وليكن ب ج مبتعداً
عن ب أ ف يأخذ أحد الأوضاع ب ج، ب ج،

♦ هل يزداد قياس الزاوية المحيطية الناشئة مثل \triangle α ب ج، \triangle β ب ج،

♦ هل يزداد $\widehat{أج}$ ، $\widehat{أج}$ ، $\widehat{أج}$ ،

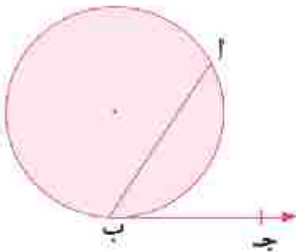
♦ إذا انطبق ب ج على ب ي ماذا تكون ؟

لائحة أننا نحصل على أكبر زاوية محيطية في القياس حينما يكاد ينطبق

ب ج على ب ي وتسمى \triangle α ب ي وعندئذٍ بالزاوية المماسية، وهي
حالة خاصة من الزاوية المحيطية وعندها يكون :

$$\widehat{أج} = \frac{1}{2} \widehat{أج}$$

الزاوية المماسية هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين أحدهما
مماس للدائرة، والآخر يحمل وترأ في الدائرة
يمر بنقطة التماس.



ويكون :

قياس الزاوية المماسية نصف قياس القوس
المحصور بين ضلعيها .

$$\text{أي أن : } \widehat{أج} = \frac{1}{2} \widehat{أج}$$



سوف تتعلم

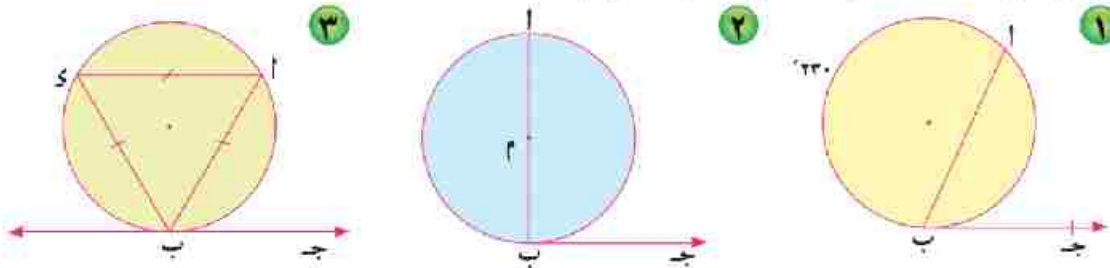
- ☆ مفهوم الزاوية المماسية.
- ☆ كيفية استنتاج علاقة
الزاوية المماسية بالزاوية
المحيطة المشتركة معها
في القوس.
- ☆ علاقة الزاوية المماسية
بالزاوية المركزية المشتركة
معها في القوس .
- ☆ كيفية حل المسائل على
الزاوية المماسية.

مصطلحات أساسية

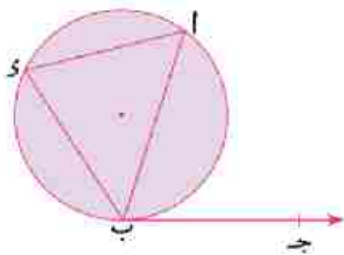
- ☆ زاوية مماسية.
- ☆ زاوية محيطية.
- ☆ زاوية مركزية.

تدريب

في كلٍّ من الأشكال الآتية احسب $\angle (أ ب ج)$.



نظرية ه
قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس.



المعطيات: $\triangle أ ب ج$ زاوية مماسية، $\angle س$ زاوية محيطية.

المطلوب: إثبات أن: $\angle (أ ب ج) = \angle (س)$

البرهان: $\therefore \triangle أ ب ج$ زاوية مماسية

١ $\therefore \angle (أ ب ج) = \frac{1}{2} \angle (أ ب)$

$\therefore \angle س$ زاوية محيطية

٢ $\therefore \angle (س) = \frac{1}{2} \angle (أ ب)$

من ١، ٢ يتبع أن:

$\angle (أ ب ج) = \angle (س)$

وهو المطلوب

نتيجة
قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس.

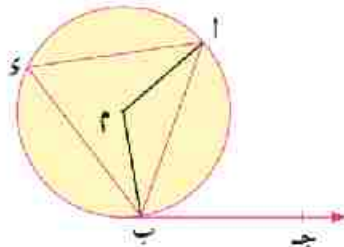
في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{ب ج}$ مماس للدائرة م، $\overline{أ ب}$ وتر التماس

$\therefore \angle (أ ب ج) = \angle (س)$

$\therefore \angle (س) = \frac{1}{2} \angle (أ م ب)$

$\therefore \angle (أ ب ج) = \frac{1}{2} \angle (أ م ب)$

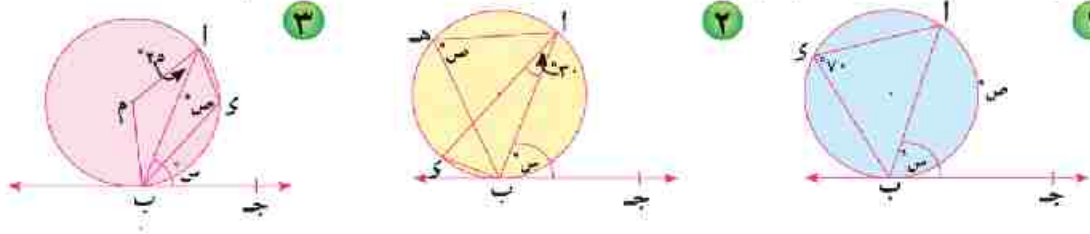


(نظرية)

(نظرية)



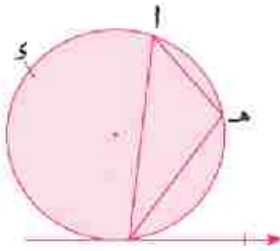
في كل من الأشكال الآتية: ب ج مماس للدائرة، اوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس.



ملحنة ماسة :

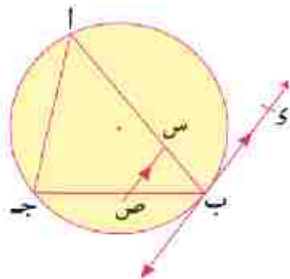
الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطة المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفي جهة واحدة منه .

أي أن: $\triangle ا ب ج$ تكمل $\triangle ا ه ب$.



مثال (١)

ا ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة، ب و مماس للدائرة عند ب،
 $س \in ا ب$ ، $ص \in ب ج$ حيث $س ص \parallel ب و$.
 أثبت أن: الشكل ا س ص ج ربعي دائري .



البرهان: $\therefore ب و$ مماس للدائرة عند ب، ا ب وتر التماس . $\therefore \angle ا ب ج = \angle ا و ب$ (ج)

$\therefore س ص \parallel ب و$ ، ا ب قاطع لهما $\therefore \angle ا ب ج = \angle ا و ب$ (ج)
 $\therefore \angle ا ب ج = \angle ا و ب$ (ج)

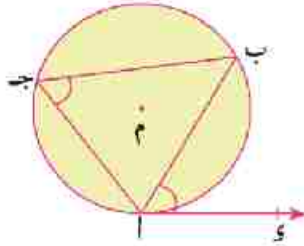
$\therefore \triangle ا ب س ص$ خارجة عن الشكل الرباعي س ص ج ا .

\therefore الشكل س ص ج ا ربعي دائري

(وهو المطلوب)

عكس
نظرية ه

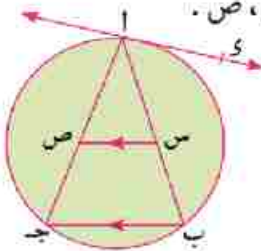
إذا رسم شعاعٌ من أحد طرفي وتر في دائرة بحيث كان قياس الزاوية المصنوعة بين هذا الشعاع والوتر يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى فإن هذا الشعاع يكون مماسًا للدائرة.



أي أن :
إذا رسم أي من أحد طرفي الوتر \overline{AB} في الدائرة م وكان :
 $\angle (AB) = \angle (ج) = \alpha$ فإن : أي مماس للدائرة م .

مثال (٢)

أب ج مثلث مرسوم داخل دائرة، أي مماس للدائرة عند أ، س \exists \overline{AB} ، س \exists \overline{AC} حيث س س // \overline{BC} أثبت أن : أي مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص .



الحل

المعطيات: أي مماس للدائرة، س ص // \overline{BC}

المطلوب: إثبات أن : أي مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص .

البرهان: \because أي مماس، \overline{AB} وتر التماس $\therefore \angle (AB) = \angle (ج) = \alpha$ (١)

\because س ص // \overline{BC} ، \overline{AC} قاطع لهما $\therefore \angle (AS) = \angle (ج) = \alpha$ (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن : $\angle (AB) = \angle (AS) = \alpha$

أي أن : $\angle (AS) = \angle (ج) = \alpha$

\therefore أي مماس للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص .

الأنشطة والتدريبات

الوحدة الأولى: المعادلات

تمارين ١ - ١

على حل معادلتين من الدرجة الأولى
في متغيرين جبرياً وبيانياً

أولاً أكمل ما يأتي:

- ١) مجموعة حل المعادلتين $س + ص = ٠$ ، $ص - ٥ = ٠$ هي
 ٢) مجموعة حل المعادلتين $س + ص = ٣$ ، $ص = ٤$ هي
 ٣) مجموعة حل المعادلتين $س + ص = ٦$ ، $س + ٨ = ٢ + ص = ١٢$ هي
 ٤) إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين $س + ٤ = ٣ + ص$ ، $س + ٤ = ٧ + ص$ متوازيين فإن $ا =$
 ٥) إذا كان للمعادلتين $س + ٢ = ١ + ٢$ ، $س + ٢ = ك$ حل وحيد فإن ك لا يمكن أن تساوي

ثانياً اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) المستقيمان: $س + ٣ = ٥ + ص$ ، $٥ - س = ٣ - ص$ يتقاطعان في:
 أ) نقطة الأصل ب) الربع الأول ج) الربع الثاني د) الربع الرابع
 ٢) مجموعة حل المعادلتين: $س - ٢ = ١ + ص$ ، $٣ + س + ١ = ١٠$ هي:
 أ) $\{(٢, ٥)\}$ ب) $\{(٤, ٢)\}$ ج) $\{(٣, ١)\}$ د) $\{(١, ٣)\}$
 ٣) إذا كان للمعادلتين $س + ٤ = ٧ + ص$ ، $س + ٣ = ك + ص$ عدد لا نهائي من الحلول فإن ك =
 أ) ٤ ب) ٧ ج) ١٢ د) ٢١

ثالثاً

- ١) أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية جبرياً وبيانياً:
 أ) $س + ص = ٤$ ، $س + ص = ٤$ ب) $س - ص = ٤$ ، $س + ٢ = ٧ + ص$
 ج) $س + ٣ = ٤ + ص$ ، $١١ = ٢ + س + ص - ٤ = ٠$ د) $٣ - س = ٤ + ص$ ، $٠ = ٤ + ص + ٢ = ٣ + ص$
 هـ) $س + ٢ = ١ + ص$ ، $س + ٢ = ٥$ ز) $س + ٢ = ٨ + ص$ ، $٣ + س + ٩ = ٩$
 ٢) إذا كان عدد الفرق الرياضية المشاركة في بطولة كأس الأمم الأفريقية ١٦ فريقاً، وكان عدد الفرق غير العربية يزيد على ثلاثة أمثال عدد الفرق العربية بمقدار ٤، أوجد عدد الفرق العربية المشاركة في البطولة.
 ٣) زاويتان حادثتان في مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠. أوجد قياس كل زاوية.
 ٤) زاويتان متكاملتان ضعف قياس الكبرى يساوي سبعة أمثال قياس الصغرى. أوجد قياس كل زاوية.
 ٥) إذا كان مجموع عمري أحمد وأسامة الآن ٤٣ سنة، وبعد ٥ سنوات يكون الفرق بين عمريهما ٣ سنوات. أوجد عمر كل منهما بعد ٧ سنوات.
 ٦) مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٤ سم، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم، أوجد مساحة المستطيل.

على حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً وجبرياً

١ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

أ) $٠ = ٢س - ٢ - ٦ = ٠$ ب) $٠ = ٣س + ٢س - ٣ = ٠$ ج) $٠ = ٢س - ٢ - ٤س + ١ = ٠$

د) $٠ = ٣س - ٢ - ٦س + ١ = ٠$ هـ) $٤ = (١ - س)س$ و) $٠ = ٥س - ٢(٣ - س)$

ز) $٦ = \frac{٤}{س} + س$ ح) $١ = \frac{١}{س} + \frac{٨}{س^٢}$ ط) $\frac{١}{س - ٥} = \frac{س}{٣}$

٢ ارسم الشكل البياني للدالة د في الفترة المعطاة ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

مقرباً الناتج لرقم عشري واحد في كل مما يأتي:

أ) د(س) = $٢س - ٢ - ٤ = ٠$ في الفترة [-٢، ٤]

ب) د(س) = $٢س + ٥ = ٠$ في الفترة [-٤، ٢]

ج) د(س) = $٢س - ٢ + ٢ = ٠$ في الفترة [-٤، ١]

د) د(س) = $٣س + (٥ - س) = ٠$ في الفترة [٥، ٠]

هـ) د(س) = $٢س - ٢ - (٢ - س) = ٠$ في الفترة [-٣، ٢]

و) د(س) = $٢س - (١ - س) - (٢ + س) = ٠$ في الفترة [-٣، ١]

ز) د(س) = $٢(٣ - س) - (٣ - س) - ٤ = ٠$ في الفترة [١، ٧]

٣ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث د(س) = $٦س - ٢س - ٩ = ٠$ في الفترة [٥، ٠] ومن الرسم أوجد:

أ) القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

ب) مجموعة حل المعادلة $٦س - ٢س - ٩ = ٠$

٤ يرش رجل حديقته بخرطوم مياه يندفع فيه الماء في مسار يتحدد بالعلاقة:

ص = $٠,٠٦س^٢ + ١,٢س + ٠,٨$ حيث س المسافة الأفقية التي يصل إليها الماء بالمتري، ص ارتفاع الماء عن سطح الأرض بالمتري، أوجد لأقرب سنتيمتر أقصى مسافة أفقية يصل إليها الماء.

٥ رأى ثعبان على الأرض صقرًا على ارتفاع ١٦٠ مترًا منه، وهو ينطلق إليه بسرعة ٢٤ مترًا/ دقيقة

لكي ينقض عليه، فإذا كان الصقر ينطلق رأسياً لأسفل حسب العلاقة ف = $٤,٩س^٢$ حيث ف المسافة بالمتري، ع سرعة الانطلاق بالمتري / دقيقة، ن الزمن بالدقائق. أوجد الزمن الذي يأخذه الثعبان لكي يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر.

تمارين (١-٣)

على حل معادلتين في متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١) مجموعة الحل للمعادلتين $s - v = 0$ ، $s + v = 9$ هي:
- أ) $\{(0, 0)\}$ ب) $\{(3, -3)\}$ ج) $\{(3, 3)\}$ د) $\{(3, 3), (3, -3)\}$
- ٢) أحد حلول المعادلتين: $s - v = 2$ ، $s + v = 20$ هو:
- أ) $(2, -4)$ ب) $(4, -2)$ ج) $(3, 1)$ د) $(4, 2)$
- ٣) عدداً موجبان مجموعهما ٧، حاصل ضربها ١٢ فإن العددين هما:
- أ) ٥، ٢ ب) ٦، ٢ ج) ٤، ٣ د) ٦، ١

ثانياً: ١) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $s - v = 2$ ، $s + v = 4$ = ٠

ب) $s + 2v = 4$ ، $s + v = 7$

ج) $s - 2v = 1$ ، $s - v = 0$

د) $s + 2v = 7$ ، $s + 3v = 19$

هـ) $s - v = 10$ ، $s - 2v = 4$

و) $s + v = 2$ ، $\frac{1}{s} + \frac{1}{v} = 2$ حيث $(s, v) \neq 0$

٢) عدد مكون من رقمين رقم أحاده ضعف رقم عشراته، فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوي نصف العدد الأصلي، فما هو العدد؟

٣) مستطيل يزيد طوله عن عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ سم^٢. أوجد محيطه.

٤) مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم، محيطه يساوي ٣٠ سم. أوجد طول ضلعي القائمة.

٥) معين الفرق بين طولي قطريه ٤ سم، ومحيطه يساوي ٤٠ سم. أوجد طول كل من قطريه.

٦) تتحرك نقطة على المستقيم $s = 5$ - $v = 2$ بحيث كان إحداثيها الصادي ضعف مربع إحداثيها السيني. أوجد إحداثي هذه النقطة.


نشاط (١) :

الربط بالتكنولوجيا

١ حل معادلتين أينس من الدرجة الأولى من مجهولين:

للتأكد من صحة حل المعادلتين : $س + ٢ = ٨$ ، $٣س + ص = ٩$
(على سبيل المثال) باستخدام الحاسبة العلمية تتبع الخطوات التالية:



نضغط على مفتاح العمليات  ونختار من القائمة **(EQN)** وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها أو بضغط على المفتاح **(EXE)** في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية: **(an X + bn Y = cn)** ندخل معاملات **(Y)**، **(X)**، والحد المطلق **(cn)** بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية، مع ملاحظة ضغط مفتاح الإدخال **(=)** يعطي قيمة **(Y)**، **(X)** وهو حل المعادلة.

٢ حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد:

نكرر نفس الخطوات السابقة في السطور الثلاثة الأولى ثم نختار المفتاح **(ax² + b x + c = 0)** ثم ندخل المعاملات **(a)**، **(b)**، **(c)** والضغط على مفتاح الإدخال **(=)** أو **(EXE)** بعد كل رقم وباستمرار الضغط على مفتاح الإدخال تعطي الحاسبة مباشرة قيمتي **(X)**.

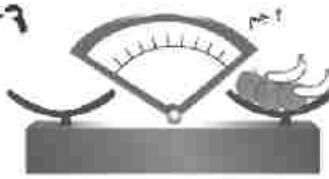


نشاط (٢) :

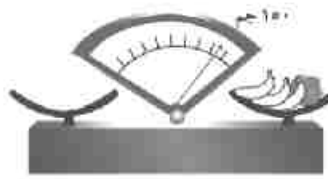


١ الشكل العكاجل: يمثل أرجوحة يقف على أحد طرفيها رجل وابنته، فإذا كان وزن الرجل ٨٠ كجم، وعلى الطرف الآخر وضع حجر وزنه ٣ أمثال وزن البنت، فإذا كانت الأرجوحة متزنة تمامًا فأوجد وزن البنت؟

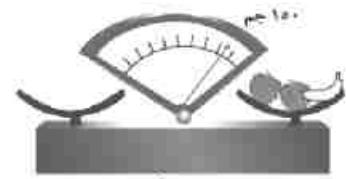
٢ الأشكال التالية: توضح وزن التفاح والموز - بفرض أن التفاح متماثل الوزن، والموز أيضًا أوجد قراءة الميزان شكل (ج). وحدد وضع المؤشر على الرسم.



شكل (ج)



شكل (ب)



شكل (أ)

اختبار الوحدة الأولى

١ أكمل ما يأتي:

- أ) إذا كان $(5, s) = (7 - s, 5)$ فإن $s + ص = \dots$
- ب) الدالة $د$ حيث $د(s) = s^2 + 2s - 4$ كثيرة حدود من الدرجة \dots
- ج) إذا كان منحنى الدالة $د$ حيث $د(s) = s^2 - 2$ يمر بالنقطة $(1, 0)$ فإن $د = \dots$

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

- أ) $s + 3 = 7, s - 5 = 3$ بيانياً وجبرياً.
- ب) $s^2 - 4 = s + 1 = 0$ باستخدام القانون مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين.
- ج) $ص - s = 3, s^2 + 2ص - 2 = s - 13$

٣ ارسم الشكل البياني للدالة $د$ حيث $د(s) = s^2 - 2s - 1$ في الفترة $[-2, 4]$

ومن الرسم أوجد:

- أ) معادلة محور التماثل
- ب) مجموعة حل المعادلة $s^2 - 2s - 1 = 0$

٤ عدنان مجموعهما ٩٠، وحاصل ضربهما يساوي ٢٠٠٠ أوجد العددين.

٥ تحرك راكب دراجة من مدينة أ شرقاً قاصداً المدينة ب ثم تحرك من المدينة ب شمالاً قاصداً المدينة ج، فقطع مسافة ١٤ كم. فإذا كان مجموع مربعي المسافتين المقطوعة ١٠٠ كم^٢، فأوجد أقصر مسافة بين المدينتين أ، ج.

٦ عند قفز الدولفين فوق سطح الماء فإنه يرسم مساراً يتبع العلاقة: $ص = -2, 0, s^2 + 2$ حيث $ص$

ارتفاع الدولفين فوق سطح الماء، s المسافة الأفقية بالقدم. أوجد المسافة الأفقية التي يقطعها الدولفين عند قفزه من الماء.

الوحدة الثانية: الدوال الكسرية والعمليات عليها

تمارين (٢ - ١)

على مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ مجموعة أصفار الدالة د: حيث $D(s) = -3s$ هي:

(أ) {٠}	(ب) {-٣}	(ج) {-٣، ٠}	(د) ح
---------	----------	-------------	-------
- ٢ مجموعة أصفار الدالة د: حيث $D(s) = (s^2 - 2s + 1)$ هي:

(أ) {١، ٠}	(ب) {-١، ٠}	(ج) {-١، ١}	(د) (١)
------------	-------------	-------------	---------
- ٣ إذا كانت ص $D(s) = 2$ ، $D(s) = s^2 - 3s + 2$ ، فإن م تساوي:

(أ) ٣	(ب) ٢	(ج) ٤	(د) ٨
-------	-------	-------	-------
- ٤ إذا كانت ص $D(s) = 5$ ، $D(s) = s^3 - 3s^2 + 2s$ ، فإن م تساوي:

(أ) ٥٠٠	(ب) ٥٠	(ج) ٥	(د) ٥٠
---------	--------	-------	--------
- ٥ إذا كانت ص $D(s) = (2s - 1)$ ، $D(s) = s^2 + 2s$ ، فإن م تساوي:

(أ) ٢٨	(ب) ١	(ج) ١	(د) ٢
--------	-------	-------	-------

ثانياً: ١ أوجد مجموعة أصفار دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية في ح.

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| (أ) $D(s) = (s - 1)(s - 2)$ | (ب) $D(s) = s^2 - 2s$ |
| (ج) $D(s) = s^2 - 16$ | (د) $D(s) = 25 - 9s^2$ |
| (هـ) $D(s) = 18s^2 - 18s$ | (و) $D(s) = 20s^2 - 20s$ |
| (ز) $D(s) = s^3 - 125$ | (ح) $D(s) = 2s^2 + 16$ |
| (ط) $D(s) = 2s^4 + 54s$ | (ي) $D(s) = 6s^2 + s - 12$ |
| (ك) $D(s) = 2s^2 - 15s$ | (ل) $D(s) = 2s^4 + 6s^2 - 2s^2$ |
| (م) $D(s) = (s - 5) - 14$ | (ن) $D(s) = (2 - s)(3 + s) + 4$ |
| (س) $D(s) = s^3 + s^2 - 2s - 8$ | (ع) $D(s) = s^3 - 2s^2 - 3s + 12$ |

- ٢ إذا كانت $D(s) = s^3 - 2s^2 - 75$ فأثبت أن العدد ٥ أحد أصفار هذه الدالة.
- ٣ إذا كانت $D(s) = (3s - 3)$ هي مجموعة أصفار الدالة د حيث: $D(s) = s^2 + 1$ فأوجد قيمة أ.
- ٤ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث $D(s) = s^2 + 2s + 15$ هي $(٥، ٣)$ ، أوجد قيمة كل من أ، ب.

على الدالة الكسرية الجبرية

أولاً : ١ عيّن مجال كل من الدوال الكسرية الجبرية الآتية ثم أوجد ن (٠) ، ن (٢) ، ن (-٢) : إن أمكن

أ) ن (س) = $\frac{٣+س}{٤}$ ب) ن (س) = $\frac{٢-س}{٢س}$ ج) ن (س) = $\frac{١}{٢+س}$

د) ن (س) = $\frac{٩+س^٢}{١٦-س^٢}$ هـ) ن (س) = $\frac{١+س^٢}{س-س^٢}$ و) ن (س) = $\frac{١-س^٢}{١+س^٢}$

٢ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{١-س}{٩+س-س^٢}$ هو ح - (٣) فاوجد قيمة أ.

ثانياً : أوجد المجال المشترك لكل من :

١ ن_١ (س) = $\frac{١}{س}$ ، ن_٢ (س) = $\frac{٢}{١+س}$

٢ ن_١ (س) = $\frac{٣}{س-٢}$ ، ن_٢ (س) = $\frac{٣-س^٢}{١-س^٢}$

٣ ن_١ (س) = $\frac{٣}{٣-س}$ ، ن_٢ (س) = $\frac{٥}{٢+س}$ ، ن_٣ (س) = $\frac{س}{س^٢-٤}$

٤ ن_١ (س) = $\frac{٤-س^٢}{٦+س-س^٢}$ ، ن_٢ (س) = $\frac{٣س}{س-٢}$ ، ن_٣ (س) = $\frac{٤-س^٢-٣س}{٢-س+س^٢}$

ثالثاً : أوجد المجال المشترك لكل مما يأتي :

١ $\frac{س}{٣}$ ، $\frac{١}{٢س}$ ، $\frac{١-س}{٥}$

٢ $\frac{٢+س}{٥+س}$ ، $\frac{٤-س}{٧-س}$ ، $\frac{٤}{٤-س}$ ، $\frac{٥-س}{٥س}$

٣ $\frac{س}{٤-س^٢}$ ، $\frac{٣}{٣-س}$ ، $\frac{١+س}{س^٢-٢س}$ ، $\frac{٥}{٢-س}$

٤ $\frac{١}{١-س^٢}$ ، $\frac{س}{٢س-١}$ ، $\frac{٤+س^٢}{٤-س^٢}$ ، $\frac{٧}{٤+س^٢+٤س}$

٥ $\frac{٢-س}{٤+س}$ ، $\frac{٧}{٣-س}$ ، $\frac{س}{٤+س^٢}$ ، $\frac{٣+س}{٢}$ ، $\frac{٣}{٩-س^٢}$ ، $\frac{٣س}{س^٢-٣س}$

٦ $\frac{٢}{٣-س}$ ، $\frac{٧}{٣+س}$ ، $\frac{٢-س^٢}{٢٧+س^٢}$ ، $\frac{٣-س^٢}{س-س^٢}$ ، $\frac{١-س}{١٦+س^٢}$ ، $\frac{٥}{س^٢-٢س-٣}$

٧ $\frac{٤-س^٢}{٦+س-س^٢}$ ، $\frac{٧}{٩-س^٢}$ ، $\frac{٤-س^٢-٣س}{٢-س+س^٢}$

تمارين (٢ - ٣)

على تساوى كسرين جبريين

أولاً : أكمل ما يأتى :

- ١ أبسط صورة للدالة $f(x) = \frac{4x^2 - 2x}{x^2}$ ، $x \neq 0$ هي
- ٢ المجال المشترك للدالتين $f_1(x) = \frac{x-2}{x-4}$ ، $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ هو
- ٣ إذا كان $f_1(x) = \frac{1+1}{x-2}$ ، $f_2(x) = \frac{4}{x-2}$ وكان $f_1(x) = f_2(x)$ فإن $x = \dots\dots\dots$
- ٤ إذا كان أبسط صورة للكسر الجبري $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$ هي $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ فإن $x = \dots\dots\dots$
- ٥ إذا كان $f_1(x) = \frac{x-7}{x+2}$ ، $f_2(x) = \frac{x}{x-2}$ وكان المجال المشترك للدالتين $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ هو $x \in (-2, 7) \cup \dots\dots\dots$

ثانياً : ١ اختصر كلاً من الكسور الآتية إلى أبسط صورة مبيناً مجالها :

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{أ}$$

$$\frac{x+1}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{ب}$$

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} \quad \text{ج}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{د}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 6}{x^2 - 18x + 81} \quad \text{هـ}$$

$$\frac{x^2 - 1}{(x+5)(x-1)} \quad \text{و}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} \quad \text{ز}$$

$$\frac{x(2-x)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \quad \text{ح}$$

$$\frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 + 4x - 3} \quad \text{ط}$$

٢ فى كل مما يأتى بين ما إذا كان $f_1(x) = f_2(x)$ أم لا مع ذكر السبب :

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = f_1(x) \quad ، \quad \frac{x-1}{x} = f_2(x) \quad \text{أ}$$

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = f_1(x) \quad ، \quad \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 6} = f_2(x) \quad \text{ب}$$

$$\frac{x^2}{x-1} = f_1(x) \quad ، \quad \frac{x^2 + 2x + 6}{(x+3)(x-1)} = f_2(x) \quad \text{ج}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x} = f_1(x) \quad ، \quad \frac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} = f_2(x) \quad \text{د}$$

٣ في كلِّ مما يأتي أثبت أن : $n_2 = n_1$

أ $n_1 (س) = \frac{1}{س}$ ، $n_2 (س) = \frac{س^٢ + ٤}{س٤ + ٣س}$

ب $n_1 (س) = \frac{س٢}{٨ + س٢}$ ، $n_2 (س) = \frac{س٢ + ٤س}{س٨ + ٣س١٦}$

ج $n_1 (س) = \frac{س١ - ٣}{س١ + س٢ + س٣}$ ، $n_2 (س) = \frac{(س١ + س٢)(١ - س)}{س٣ + س}$

د $n_1 (س) = \frac{س٢ + س}{١ + س + س٢ + س٣}$ ، $n_2 (س) = \frac{س}{١ + س}$

٤ أوجد المجال المشترك للدالتين n_1 ، n_2 لكلِّ مما يأتي:

أ $n_1 (س) = \frac{٢ + س}{٣}$ ، $n_2 (س) = \frac{٣ - س}{س}$

ب $n_1 (س) = \frac{٥ - س}{١ - س٢}$ ، $n_2 (س) = \frac{٢}{س}$

ج $n_1 (س) = \frac{٥ - س}{س - ٣}$ ، $n_2 (س) = \frac{س٣}{١ + س٢}$

د $n_1 (س) = \frac{س}{٨ - س٣}$ ، $n_2 (س) = \frac{١١}{س٤ - ٣س}$

هـ $n_1 (س) = \frac{١ + س٣}{س٧}$ ، $n_2 (س) = \frac{س١ + س٢}{س٨١ - ٤س}$

و $n_1 (س) = \frac{س٢ + ٩س + ٢٠}{س١٦ - ٣س}$ ، $n_2 (س) = \frac{س٢ + ٥}{س٤ - ٢س}$

على العمليات على الكسور الجبرية

أولاً : أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن حيث :

$$\begin{aligned} 1 \text{ ن(س)} &= \frac{س-٢}{س} + \frac{٢+٣}{س+٣} \\ 2 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢}{س+٢} + \frac{٤}{٤} \\ 3 \text{ ن(س)} &= \frac{س}{س^٢} + \frac{٣}{س+٣} \\ 4 \text{ ن(س)} &= \frac{س}{س} - \frac{س}{٤+س} \\ 5 \text{ ن(س)} &= \frac{س-٣}{س} - \frac{٣}{س-٣} \\ 6 \text{ ن(س)} &= \frac{س-١}{س} + \frac{١}{س} \\ 7 \text{ ن(س)} &= \frac{س}{س} + \frac{س}{س-١} \\ 8 \text{ ن(س)} &= \frac{س}{س} - \frac{س}{٢+س} \\ 9 \text{ ن(س)} &= \frac{س+٣}{س} - \frac{٣+س}{س} \\ 10 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢}{س-١} + \frac{٣}{١+س} \end{aligned}$$

ثانياً : أوجد ن(س) في أبسط صورة محددًا مجال ن في كل مما يأتي :

$$\begin{aligned} 1 \text{ ن(س)} &= \frac{س+٣}{س} \times \frac{١-س^٢}{س-٢} \\ 2 \text{ ن(س)} &= \frac{١-س^٢}{س+٣} \div \frac{٣-٢س+س^٢}{١+س} \\ 3 \text{ ن(س)} &= \frac{س-٢}{س} \times \frac{١+س+س^٢}{١-س^٢} \\ 4 \text{ ن(س)} &= \frac{٢٥-٥س}{١٢+س} \div \frac{١٥-٣س}{٢+س} \end{aligned}$$

ثالثاً : أوجد ن(س) في أبسط صورة مبيناً مجال ن :

$$\begin{aligned} 1 \text{ ن(س)} &= \frac{س-٥}{س} + \frac{س-٦}{س} \\ 2 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢-٨س+١٢}{س^٢-٤س+٤} + \frac{س^٢-٤س-٥}{س^٢-٧س+١٠} \\ 3 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢-٩}{س-٦} - \frac{س^٢+٢س+٤}{س-٨} \\ 4 \text{ ن(س)} &= \frac{س-٣}{س} - \frac{س-٣}{س^٢-٧س+١٢} \\ 5 \text{ ن(س)} &= \frac{س+٣}{س} + \frac{س-٥}{س} \\ 6 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢-٢س+٣}{س-٩} \div \frac{س^٢-٢س-٦}{س-٦} \\ 7 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢+١٢س+٣٦}{س-٣٦} \times \frac{س^٢+١٢س+٣٦}{س-٣٦} \\ 8 \text{ ن(س)} &= \frac{س-١}{س+٢} \div \frac{س^٢-٢س+١}{س-١} \\ 9 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢-٢س-١٥}{س-٩} \div \frac{س^٢-٢س-١٥}{س-٩} \\ 10 \text{ ن(س)} &= \frac{س^٢-٣س-١٥}{س-٥} \div \frac{س^٢-٣س-١٥}{س-٥} \end{aligned}$$



إذا كان $n_1 = (س) + س - \frac{1}{س} + س$ ، $n_2 = (س) + س - \frac{4}{س} + س$
وكانت $n = (س) = n_1 + n_2$ (س) أوجد:

- ① مجال n (س) ② n (س) في أبسط صورة ③ n (1)، n (5) إن أمكن ذلك

اختبار الوحدة الثانية

أولاً: أكمل ما يأتي:

- ① أبسط صورة للدالة n حيث $n = (س) = \frac{س^3}{س+1} = \frac{س}{س+1}$ هي ومجالها
- ② إذا كان للكسر الجبري $\frac{س-1}{س-3}$ معكوس ضربي هو $\frac{س-3}{س+2}$ فإن $أ =$
- ③ إذا كان $n_1 = (س) = \frac{س+1}{س-2}$ ، $n_2 = (س) = \frac{س+2}{س-2}$ فإن المجال المشترك الذي تتساوى فيه n_1 ، n_2 هو

ثانياً:

- ① أوجد المجال المشترك الذي تتساوى فيه n_1 (س) ، n_2 (س) حيث:
- $$n_1 = (س) = \frac{س^2 + س + 12}{س^2 + س + 4} ، n_2 = (س) = \frac{س^3 - 2س^2 - 3س}{س^3 + س^2 + 1}$$
- ② إذا كان: $n = (س) = \frac{س^4 - 49}{س^2 - 8} + \frac{س + 7}{س - 2}$ فأوجد n (س) في أبسط صورة مبيّناً مجالها، واحسب قيمة $n(1)$.
- ③ إذا كان $n_1 = (س) = \frac{س^2}{س^2 - 3}$ ، $n_2 = (س) = \frac{س^3 + 2س^2 + 3س}{س^3 - 4س}$ أثبت ان $n_1 = n_2$
- ④ إذا كان مجال الدالة n حيث $n = (س) = \frac{ب}{س} + \frac{9}{س+1}$ هو ح- (4، 0) ، $n(5) = 2$ أوجد قيمتي $أ$ ، $ب$
- ⑤ أوجد الدالة n في أبسط صورة مبيّناً مجالها حيث:
- $$n = (س) = \frac{س^2 - 5}{س^2 - 1} + \frac{س - 5}{س^2 + 6س + 5}$$
- ثانياً: $n = (س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 + س + 1} \times \frac{س^2 - 2}{س^2 + س + 1}$
- ⑥ إذا كان $n = (س) = \frac{س^2 - 2}{(س^2 + 2)(س - 2)}$
- أولاً: أوجد n^{-1} (س) وعين مجاله.
- ثانياً: إذا كان $n^{-1} = 3$ (س) فما قيمة $س$.

الوحدة الثالثة : الاحتمال

تمارين (٣ - ١)

على العمليات على الأحداث (التقاطع والاتحاد)

أولاً :

ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة.

١ اكتب فضاء العينة.

٢ اكتب الأحداث الآتية:

١ ا = حدث الحصول على عدد زوجي. ب = حدث الحصول على عدد فردي.

ج = حدث الحصول على عدد أولي زوجي.

٣ أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية:

١ وقوع الحدثين أ و ب معاً. ب وقوع الحدثين أ و ج معاً.

ثانياً :

١ إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة لتجربة عشوائية، أكمل:

١ ل (أ) = ٠,٣ ب ل (أ) = ٠,٥٥ ج ل (أ) =

ل (ب) = ٠,٦ ل (ب) = $\frac{٣}{١١}$ ل (ب) = $\frac{١}{٤}$

ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ل (أ ∩ ب) = ... ل (أ ∩ ب) = صفر

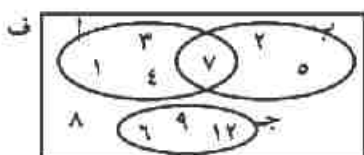
ل (أ ∪ ب) = ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$ ل (أ ∪ ب) = ٠,٩

٢ باستخدام شكل فن المقابل أوجد:

١ ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

ب ل (أ ∩ ج) ، ل (أ ∪ ج)

ج ل (ب ∩ ج) ، ل (ب ∪ ج)



ثالثاً :

إذا كان أ، ب حدثين في فضاء العينة لتجربة عشوائية، أجب عن الآتي:

١ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢}$ فأوجد ل (أ ∪ ب)

٢ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد ل (أ ∩ ب)

٣ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ فأوجد ل (أ ∪ ب) في الحالات الآتية:

١ ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ب أ، ب حدثان متنافيان.

رابعاً ، اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ١ إذا كان A ، B حدثين متنافيين فإن $L(A \cap B)$ تساوي

<input type="checkbox"/> أ ٠	<input type="checkbox"/> ب صفر	<input type="checkbox"/> ج ٠,٥٦	<input type="checkbox"/> د ١
------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	------------------------------
- ٢ إذا كانت $A \supset B$ ، فإن $L(A \cup B)$ تساوي:

<input type="checkbox"/> أ صفر	<input type="checkbox"/> ب $L(A)$	<input type="checkbox"/> ج $L(B)$	<input type="checkbox"/> د $L(A \cap B)$
--------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	--
- ٣ إذا أُلقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوي:

<input type="checkbox"/> أ صفر %	<input type="checkbox"/> ب ٢٥ %	<input type="checkbox"/> ج ٥٠ %	<input type="checkbox"/> د ١٠٠ %
----------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	----------------------------------
- ٤ إذا أُلقي حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجي وظهور عدد فردي معاً يساوي:

<input type="checkbox"/> أ صفر	<input type="checkbox"/> ب $\frac{1}{2}$	<input type="checkbox"/> ج $\frac{3}{4}$	<input type="checkbox"/> د ١
--------------------------------	--	--	------------------------------

خامساً :

- ١ صندوق يحتوي على ١٢ كرة منها ٥ كرات زرقاء، ٤ كرات حمراء، وباقي الكرات بيضاء. سحبت كرة واحدة عشوائياً من الصندوق. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

<input type="checkbox"/> أ زرقاء	<input type="checkbox"/> ب ليست حمراء	<input type="checkbox"/> ج زرقاء أو حمراء
----------------------------------	---------------------------------------	---
- ٢ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠، سحبت منه بطاقة واحدة عشوائياً. أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة:

<input type="checkbox"/> أ يقبل القسمة على ٥.	<input type="checkbox"/> ب فردياً ويقبل القسمة على ٥
---	--
- ٣ إذا كان A ، B حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $L(B) = \frac{1}{12}$ ، $L(A \cup B) = \frac{1}{3}$ فأوجد $L(A)$ إذا كان:

<input type="checkbox"/> أ، B حدثان متنافيان.	<input type="checkbox"/> ب $A \supset B$
---	--
- ٤ سحبت بطاقة عشوائية من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٢٠ احسب احتمال أن تكون البطاقة المختارة تحمل عدداً:

<input type="checkbox"/> أ يقبل القسمة على ٣	<input type="checkbox"/> ب يقبل القسمة على ٥	<input type="checkbox"/> ج يقبل القسمة على ٣ و يقبل القسمة على ٥	<input type="checkbox"/> د يقبل القسمة على ٣ أو يقبل القسمة على ٥
--	--	--	---

تمارين متنوعة على العمليات على الأحداث

- ١ مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٣٠ خلطت جيدًا، فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا. احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:
 - أ) عددًا مضاعفًا للعدد ٦.
 - ب) عددًا مضاعفًا للعدد ٨.
 - ج) عددًا مضاعفًا للعدد ٦، ٨ معًا.
 - د) عددًا مضاعفًا للعدد ٦ أو ٨.
- ٢ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية بحيث كان احتمال وقوع الحدث ب يساوي ثلاثة أمثال وقوع الحدث أ، واحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل يساوي ٠,٦٤، أوجد احتمال وقوع كل من الحدث أ واحتمال وقوع الحدث ب.
- ٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0,5$ ، $P(A \cup B) = 0,8$ ، ل (ب) = س. فأوجد قيمة س إذا كان:
 - أ) الحدثين أ، ب متنافيين.
 - ب) $P(A \cap B) = 0,1$.
- ٤ حجر نرد غير منتظم، احتمال ظهور كل من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ متساوي واحتمال ظهور العدد ٦ يساوي ٣ مرات احتمال العدد ١، فإن ألقى هذا الحجر مرة واحدة. احسب احتمال:
 - أ) ظهور العدد ٦
 - ب) ظهور عدد فردي أولي
- ٥ اشترك ثلاثة لاعبين أ، ب، ج في مسابقة لرفع الأثقال، فإذا كان احتمال فوز اللاعب أ يساوي ضعف احتمال فوز ب، واحتمال فوز اللاعب ب يساوي احتمال فوز اللاعب ج، فأوجد احتمال فوز اللاعب ب أو ج علمًا بأن لاعبًا واحدًا سيفوز في المسابقة.
- ٦ ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانيات، وكان أ، ب حدثين من ف، فإذا كان عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع الحدث أ يساوي ١٣، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوي ٢٤ وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{5}{6}$ ، ل (ب) = $\frac{5}{13}$ فأوجد:
 - أ) احتمال وقوع الحدث أ.
 - ب) احتمال وقوع الحدثين أ، ب معًا.
- ٧ اشترك ٤٥ تلميذًا في إحدى المدراس في الأنشطة الرياضية منهم ٢٧ تلميذًا في فريق كرة القدم، ١٥ تلميذًا في فريق كرة السلة، ٩ تلاميذ في كرة القدم وكرة السلة، اختير تلميذ من هذه المدرسة عشوائيًا. مثل ذلك بشكل فن، ثم أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار:
 - أ) مشترك في فريق كرة القدم.
 - ب) مشترك في فريق كرة السلة.
 - ج) مشترك في فريق كرة القدم وفريق كرة السلة.
 - د) غير مشترك في أي من الفرق السابقة.

نشاط الوحدة الثالثة

في إحدى الدراسات التي اشتملت على اختيار ٦٠٠٠ حالة ولادة في إحدى المحافظات اختيرت عشوائياً، اهتم الباحثون ببحث العلاقة بين عمر الأم عند الإنجاب، ومكان إقامتها، وكان أعداد المواليد في الحضر والريف كما هو ممدون في الجدول التالي:



مكان إقامة الأم		عمر الأم
الريف	الحضر	
٢٤٠	١٢٠	أقل من ٢٠ عاماً
٣٦٠	٢٤٠	من ٢٠ عاماً إلى أقل من ٢٢ عاماً
١٤٤٠	١٧٤٠	من ٢٢ عاماً إلى أقل من ٣٠ عاماً
٣٦٠	١٥٠٠	من ٣٠ عاماً فأكثر

١ ماذا تستنتج من بيانات هذا الجدول؟

٢ إذا كان الحدث أ يعبر عن الأم التي أنجبت وتقيم في الحضر، الحدث ب يعبر عن الأم التي أنجبت لا يزيد عمرها على ٢٢ عاماً. أوجد:

٣ مثل المجموعتين أ، ب بشكل فن ثم أوجد كلاً من:

٤ تنبأ بعدد المواليد إذا كانت الأم تقيم في الحضر، وعمرها ٣٠ عاماً فأكثر، علماً بأن عدد حالات الولادة ٩٠٠٠ حالة في المحافظة.

٥ اكتب تقريراً عن معدل الزيادة السكانية وآثارها السلبية على الدخل القومي، والدور الذي ينبغي أن تقوم به وسائل الإعلام للحد من هذه الظاهرة.

اختبار الوحدة الثالثة

أولاً أكمل ما يأتي:

- ١ إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٦٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه يساوي
- ٢ إذا كان $P(A) = 0.4$ ، فإن $P(\bar{A}) = \dots\dots\dots$
- ٣ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين وكان $P(A) = \frac{1}{3}$ ، $P(A \cup B) = \frac{7}{13}$ فإن $P(B) = \dots\dots\dots$
- ٤ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $P(A) = 0.7$ ، $P(A \cup B) = 0.9$ ، فإن $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

ثانياً

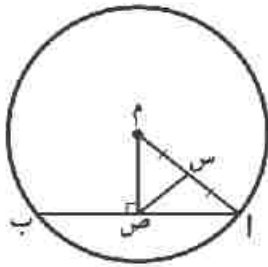
- ١ صندوق به ٢٠ كرة، لها نفس الشكل والحجم والوزن، ومخلوطة جيداً، منها ٨ كرات حمراء، ٧ كرات بيضاء، وباقي الكرات خضراء. سحبت كرة واحدة عشوائياً. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:
 - أ) حمراء
 - ب) بيضاء أو خضراء
 - ج) ليست بيضاء
- ٢ كيس به ٣٠ بطاقة متماثلة مخلوطة جيداً، سحبت بطاقةً واحدةً عشوائياً من الكيس، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة يقبل:
 - أ) القسمة على ٣
 - ب) القسمة على ٥
 - ج) القسمة على ٣ و ٥
 - د) القسمة على ٣ أو ٥
- ٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان $P(A) = 0.8$ ، $P(B) = 0.7$ ، $P(A \cap B) = 0.6$ فأوجد:
 - أ) احتمال عدم وقوع الحدث أ.
 - ب) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

الوحدة الرابعة : الدائرة

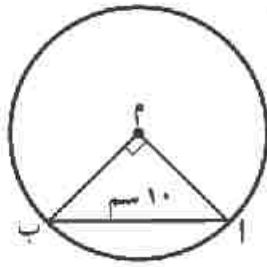
تمارين (٤ - ١)

على تعاريف و مفاهيم اساسية

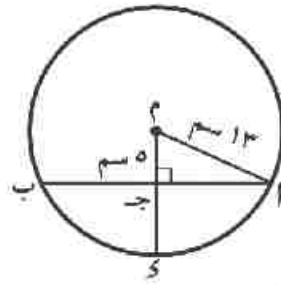
١ في كل من الأشكال الآتية، م دائرة، أكمل:



حـ



ب

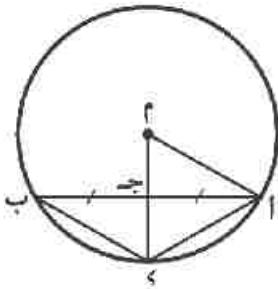


ا

س ص = ٧ سم، $\pi = \frac{22}{7}$
مساحة الدائرة = سم^٢

و (Δ) =
م = ١

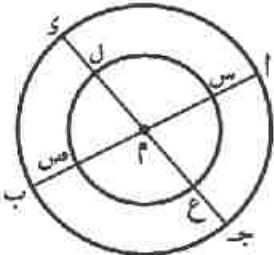
أ ب =
ج د =



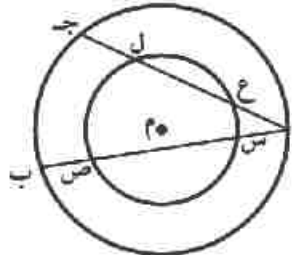
٢ في الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم،

أ ب وتر فيها طوله ٢٤ سم، ج د منتصف أ ب، م ج \cap الدائرة م = {ك}

أوجد مساحة المثلث أ ب ج.



شكل (٢)



شكل (١)

٣ في الأشكال المقابلة: اذكر القطع المستقيمة

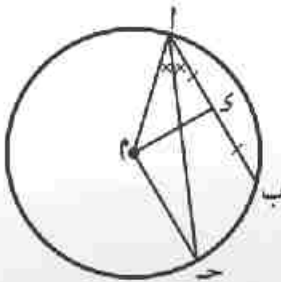
المتساوية في الطول؟ فسر إجابتك.

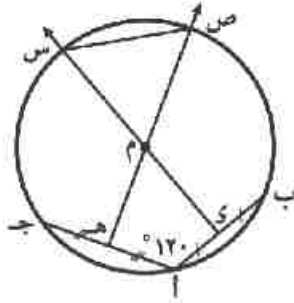
٤ في الشكل المقابل: أ ب وتر في الدائرة م،

أ ج ينصف ب أ م ويقطع الدائرة م في ج.

إذا كان ك منتصف أ ب

فأثبت أن م ك \perp ج م.





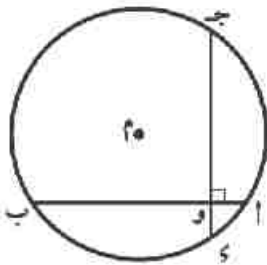
٥ في الشكل المقابل: \overline{AB} ، \overline{AC} وتران في الدائرة م

يحصران زاوية قياسها 120° ،

ي، هـ منتصفا \overline{AB} ، \overline{AC} على الترتيب. رسم \overline{SM} ، \overline{HM}

فقطعا الدائرة في S ، H على الترتيب.

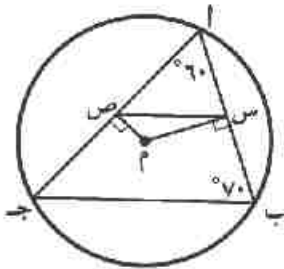
أثبت أن المثلث SMH متساوي الأضلاع.



٦ في الشكل المقابل: دائرة م طول نصف قطرها 7 سم،

\overline{AB} ، \overline{CD} وتران متعامدان ومقاطعان في النقطة و.

فإذا كان $AB = 12$ سم، $CD = 10$ سم، أوجد طول م و



٧ في الشكل المقابل: في الدائرة م، $\overline{MS} \perp \overline{AB}$ ، $\overline{MT} \perp \overline{AC}$ ،

و $\angle A = 60^\circ$ ، و $\angle B = 70^\circ$

أوجد قياسات زوايا المثلث م س ص

٨ \overline{AB} ، \overline{CD} وتران متوازيان في الدائرة م، $AB = 12$ سم، $CD = 16$ سم. أوجد البعد بين هذين الوترين

إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = 10 سم. هل توجد إجابات أخرى؟ فسر إجابتك.

فكر إذا كان \overline{AB} ، \overline{CD} وترين في دائرة حيث $AB < CD$ ، أي الوترين أقرب إلى مركز

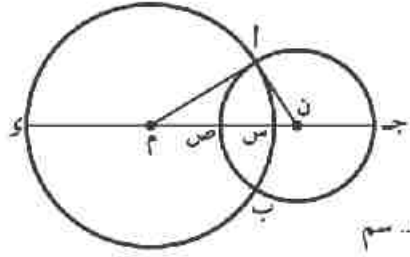
الدائرة؟ فسر إجابتك.



على أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة
بالنسبة لدائرة

١ أكمل ما يأتي:

- أ) إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم، فإن ل يكون
- ب) إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتين م، ن تكونان
- ج) م، ن دائرتان متقاطعتان، طولاً نصفى قطريهما ٣ سم، ٤ سم على الترتيب، فإن م ن \exists
- د) إذا كانت مساحة الدائرة م = 16π سم^٢، النقطة في مستويها حيث م = ٨ سم، فإن أ تقع
- الدائرة م.
- هـ) دائرة م طول قطرها ٦ سم، فإذا كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة، فإن بعد مركز الدائرة عن المستقيم ل \exists
- و) دائرة طول قطرها (٢س + ٥) سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم فإن المستقيم ل يكون

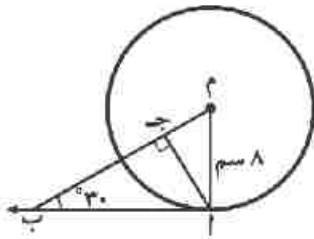


٢ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في ا، ب

طولاً نصفى قطريهما ٨ سم، ٦ سم على الترتيب،

س ص = ٤ سم. ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

- أ) أكمل: ص م = سم، ج س = سم، ج ي = سم
- ب) هل محيط المثلث أن م = طول ج ي؟ فسر إجابتك.
- ج) ما قياس زاوية ن ا م؟ د) أوجد مساحة المثلث ن ا م.
- هـ) ما طول الوتر المشترك ا ب؟



٣ في الشكل المقابل: ا ب مماس للدائرة م عند ا،

م = ٨ سم، و (\triangle ا ب م) = ٣٠°. أوجد طول كل من: ا ب، ا ج

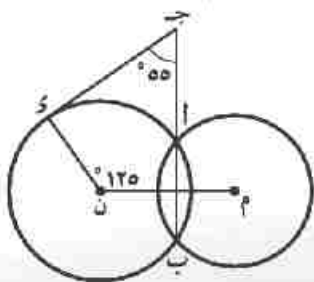
٤ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في ا، ب،

ج \exists ب ا، و \exists الدائرة ن، و (\triangle م ن ي) = ١٢٥°،

و (\triangle ب ج ي) = ٥٥° أثبت أن ج ي مماس للدائرة ن عند ي.

٥ ا ب قطر في الدائرة م، ا ج، ب ي، مماسان للدائرة م، ج م قطع

الدائرة م في س، ص ويقطع ب ي في هـ. أثبت أن: ج س = ص هـ.



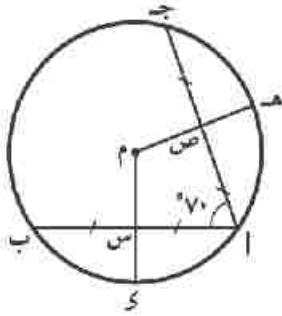
٦ م، ن دائرتان متقاطعتان في ا، ب،

م = ١٢ سم، ن ا = ٩ سم، م ن = ١٥ سم. أوجد طول ا ب.

على تعيين الدائرة

- ١ إذا كان L مستقيمًا في المستوى، أنقطة معلومة حيث $A \in L$ ، باستخدام الأدوات الهندسية، ارسم دائرة تمر بالنقطة A ، وطول نصف قطرها 2 سم. كم دائرة يمكن رسمها؟ (لا تمنح الأقواس).
- ٢ باستخدام أدواتك الهندسية ارسم AB طولها 4 سم ثم ارسم على شكل واحد:
 - أ دائرة تمر بالنقطتين A ، B وطول قطرها 5 سم. ما عدد الحلول الممكنة؟
 - ب دائرة تمر بالنقطتين A ، B وطول نصف قطرها 2 سم. ما عدد الحلول الممكنة؟
 - ج دائرة تمر بالنقطتين A ، B وطول قطرها 3 سم. ما عدد الحلول الممكنة؟
- ٣ ارسم المثلث $س ص ع$ الذي فيه $س ص = 5$ سم، $ص ع = 3$ سم، $ع س = 7$ سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث $س ص ع$.
 - أ ما نوع المثلث $س ص ع$ بالنسبة لقياسات زواياه؟
 - ب أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لهذا المثلث؟
- ٤ ارسم المثلث $أ ب ج$ القائم الزاوية في $ب$ حيث $أ ب = 4$ سم، $ب ج = 3$ سم، ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث. أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لأضلاع هذا المثلث؟
- ٥ ارسم المثلث $أ ب ج$ المتساوي الأضلاع والذي طول ضلعه 4 سم، ارسم الدائرة الخارجة للمثلث $أ ب ج$.
 - أ حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى: ارتفاعات المثلث - متوسطات المثلث - منصفات زوايا رؤوس المثلث.
 - ب كم عدد محاور التماثل للمثلث المتساوي الأضلاع؟
- ٦ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث $أ ب ج$ الذي فيه $أ ب = 4$ سم، $ب ج = 5$ سم، $ج أ = 6$ سم ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط A ، B ، C . ما نوع المثلث $أ ب ج$ بالنسبة لقياسات زواياه؟ وأين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث؟

على علاقة أوتار الدائرة بمركزها



١ في الشكل المقابل: \overline{AB} ، \overline{AC} وتران متساويان في الطول في الدائرة م،

س منتصف \overline{AB} ، ص منتصف \overline{AC} ، و $\angle ج ا ب = 70^\circ$.

١ ا) احسب و $\angle ك م ه$.

ب) أثبت أن: $س ك = ص ه$.

٢ \overline{AB} ، \overline{AC} وتران متساويان في الطول في الدائرة م، س، ص منتصفا

\overline{AB} ، \overline{AC} ، و $\angle م س ص = 30^\circ$.

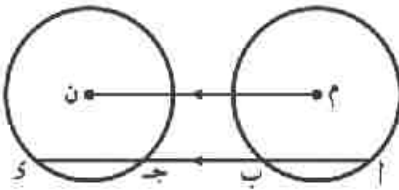
أثبت أن: أولاً: المثلث م س ص متساوي الساقين. ثانياً: المثلث اس ص متساوي الأضلاع.

٣ \overline{AB} ، \overline{AC} وتران في الدائرة م، م س \perp \overline{AB} ، ص منتصف \overline{AC} ، و $\angle ا ب ج = 70^\circ$ ، م س = م ص.

١ ا) اوجد و $\angle ا ب ج$. ب) أثبت أن: محيط $\Delta اس ص = \frac{1}{4}$ محيط $\Delta ا ب ج$.

٤ دائرتان متحدتا المركز م، \overline{AB} ، \overline{CD} وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س، ص

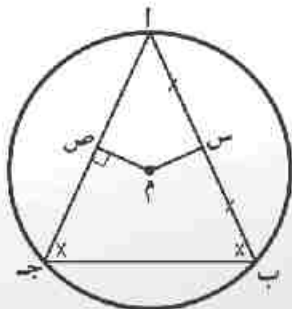
على الترتيب. أثبت أن $\overline{AB} = \overline{CD}$.



٥ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متطابقتان،

رسم $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ فقطع الدائرة م في ا، ب

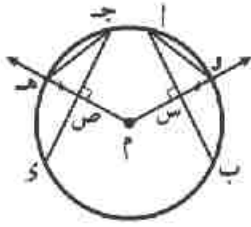
وقطع الدائرة ن في ج، د. أثبت أن: $\overline{AB} = \overline{CD}$.



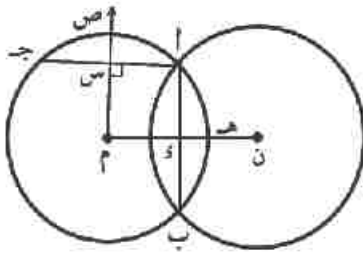
٦ في الشكل المقابل: \overline{AB} ج مثلث مرسوم داخل الدائرة م، فيه:

و $\angle ا ب ج = 90^\circ$ ، س منتصف \overline{AB} ، م ص \perp \overline{AC} .

أثبت أن: م س = م ص



- ٧ أب، جـ وتران في الدائرة م، م س \perp أب ويقطع الدائرة في ك، م ص \perp جـ ويقطع الدائرة في هـ، ك س = هـ ص.
أثبت أن: أولاً: أب = جـ ثانياً: او = جـ هـ



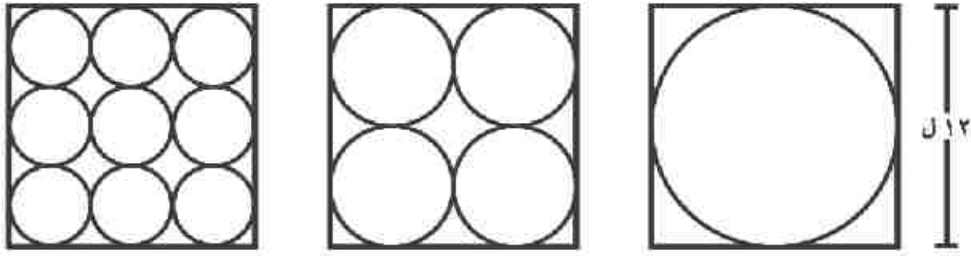
- ٨ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متقاطعتان في ا، ب، رسم م س \perp ا ب ويقطع الدائرة م في ص. ورسم ن س يقطع ا ب في ك والدائرة ن في هـ. إذا كان ا ب = ا جـ = ا د.
أثبت أن: س ص = ك هـ.

- ٩ م، ن دائرتان متماستان من الداخل في ا، رسم ا ب، ا جـ وتران متساويان في الطول في الدائرة الكبرى فقطعا الدائرة الصغرى في ك، هـ على الترتيب.
أثبت أن: ا د = ا هـ

نشاط الوحدة الرابعة

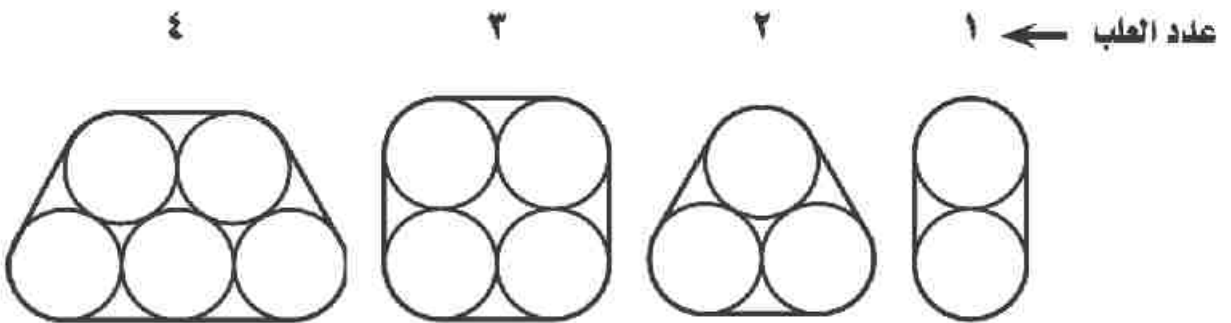
الأنماط الهندسية

١ يقوم مخبز بإنتاج فطائر دائرية الشكل ثم وضعها في علب مربعة طول ضلع كل منها ١٢ ل سم، كما في النمط التالي.

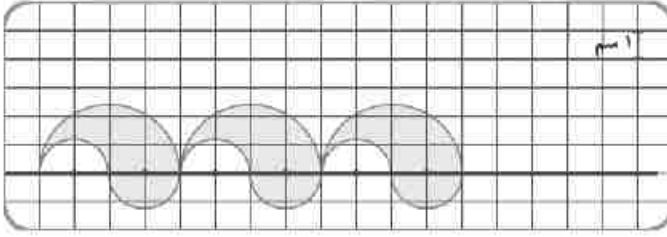


- ٢ احسب المساحة التي تشغلها الفطائر في كل علة وسجل ملاحظاتك.
 ب ما المساحة التي تشغلها فطائر العلة الرابعة وفطائر العلة العاشرة من هذا النمط؟
 ج إذا كانت جميع الفطائر من نفس النوع ومتساوية في الارتفاع. فهل تكون أثمان العلب متساوية أم مختلفة. فسر إجابتك.

٢ مصنع لإنتاج المربى يعبأ إنتاجه في عبوات أسطوانية الشكل طول نصف قطر قاعدتها ٥ سم، تم تغليفها بالبلاستيك ولصق شريط من الورق حولها كما في النمط التالي.



- ٢ احسب طول الشريط في كل حالة، هل توجد علاقة بين عدد العلب وطول الشريط؟
 ب ما طول الشريط الذي يدور حول ٦ علب؟
 ج ما طول الشريط الذي يدور حول ٧ علب؟ ناقش الأوضاع الممكنة لضم العلب واستنتج شرط استمرار نفس النمط لحساب طول الشريط.



٣ ادرس النمط المقابل ثم ارسم

الوحدة التالية لهذا النمط.

أ ما مساحة ١٠ وحدات من نفس

النمط؟

ب ما محيط ٧ وحدات من هذا

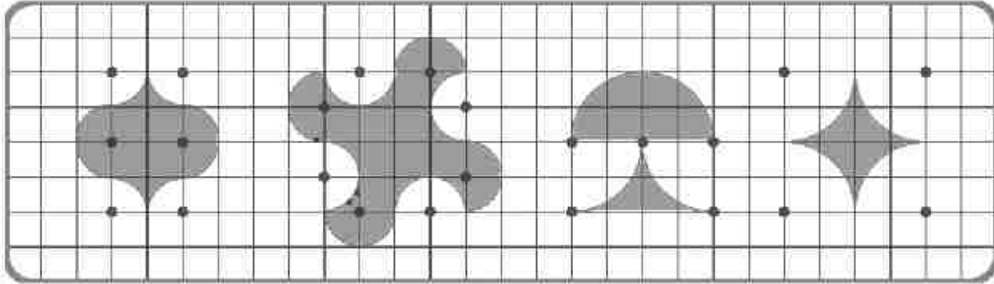
النمط؟

ج كم عدد الوحدات التي يمكن استخدامها

في تصميم إطار حول صورة على شكل

مستطيل بعناه ٢٤ سم، ٣٦ سم؟

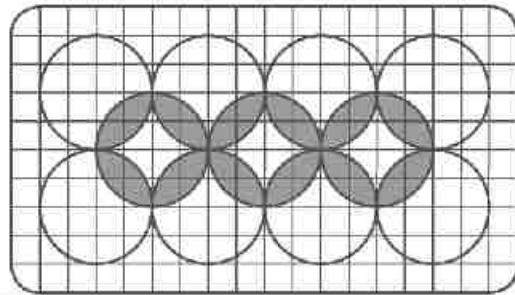
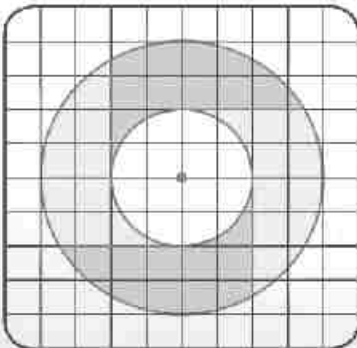
٤ ادرس كلاً من الوحدات التالية، ثم أوجد مساحة ومحيط كل وحدة.



٥ تكنولوجيا: استخدم برامج الحاسب الآلي في رسم التشكيلات الفنية التالية:

أ التماس وتقاطع الدوائر المتطابقة.

ب التماس والدوائر المتحدة المحور.



ابتكر نماذج أخرى واستخدمها في دراستك لمادة التربية الفنية.

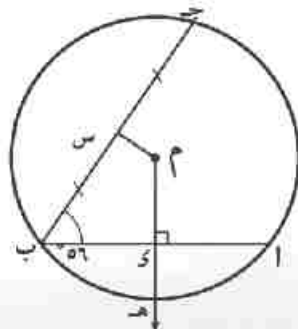
تمارين متنوعة على الوحدة الرابعة

١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

- أ وتر الدائرة هو القطعة المستقيمة المرسومة بين
 ب المستقيم المار بمركز الدائرة عمودياً على أى وتر فيها
 ج خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل يمر
 د مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع
 ه الأوتار المتساوية الطول في دائرة

٢ اختر الإجابة الصحيحة من الإجابات المعطاة:

- أ المماس لدائرة طول قطرها ٦ سم يكون على بعد سم من مركزها.
 (٦ أو ١٢ أو ٣ أو ٢)
 ب يمكن رسم دائرة تمر برؤوس
 (معين أو مستطيل أو شبه منحرف أو متوازي أضلاع)
 ج \overline{AB} قطر في الدائرة م، \overline{AJ} ، \overline{BK} مماسان للدائرة، فإن \overline{AJ} \overline{BK} .
 (يقطع أو يوازي أو عمودى على أو ينطبق على)
 د دائرة محيطها ٦ ط سم، والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم، فإن المستقيم ل يكون
 (مماس للدائرة أو قاطع للدائرة أو خارج الدائرة أو قطر للدائرة)
 ه م، ن دائرتان متقاطعتان، طولاً نصفى قطريهما ٣ سم، ٥ سم، فإن: $m \cap n \neq \emptyset$
 ($]\infty, 8[$ أو $]\infty, 2[$ أو $]2, 0[$ أو $]18, 2[$)



٣ في الشكل المقابل: \overline{AB} ، \overline{BC} وتران في الدائرة م

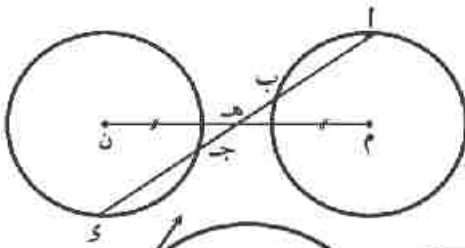
التي طول نصف قطرها ٥ سم، م \perp \overline{AB}

يقطع \overline{AB} في \overline{K} ويقطع الدائرة م في \overline{H} ،

س منتصف \overline{BC} ، $\angle ABH = 8^\circ$ ، و $\angle ABC = 56^\circ$

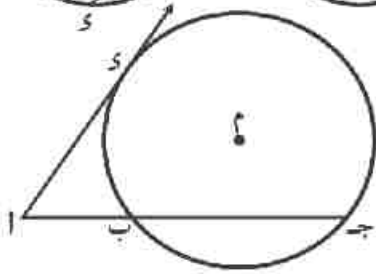
أوجد: أ) $\angle KMS$ و ب) طول \overline{KH}

٤ في الشكل المقابل: م، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان،



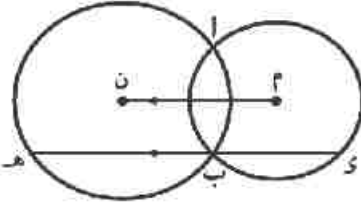
هـ منتصف م ن ، رسم $\overline{أه}$ يقطع الدائرة م في أ، ب ويقطع الدائرة ن في ج، د.
أثبت أن: ١) $أب = ج د$ ٢) هـ منتصف $أ د$.

٥ في الشكل المقابل:



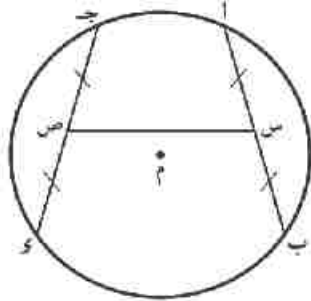
م دائرة طول نصف قطرها $هـ سم$ ، ا نقطة خارج الدائرة، $أ د$ مماس للدائرة م عند د، $أ ب$ يقطع الدائرة في ب، ج على الترتيب حيث $أ ب = ٤ سم$ ، $أ ج = ١٢ سم$.
١) أوجد بعد الوتر $ب ج$ عن مركز الدائرة.
٢) احسب طول $أ د$.

٦ في الشكل المقابل:



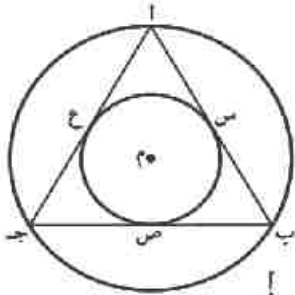
م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، رسم $ب د // م ن$ ويقطع الدائرتين في د، هـ على الترتيب. أثبت أن: $د هـ = ٢ م ن$.

٧ في الشكل المقابل:



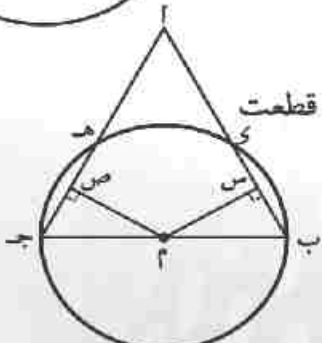
$أ ب$ ، $ج د$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م، $س$ ، $ص$ منتصفا $أ ب$ ، $ج د$ بحيث يكون ب، د في جهة واحدة من $س ص$.
أثبت أن: $∠ ب س ص = ∠ د س ص$ و $∠ د س ص = ∠ ب س ص$.
نصيحة: هل $أ ج // ب د$ ؟ فسر إجابتك.

٨ في الشكل المقابل:



دائرتان متحدتا المركز م طولاً نصفى قطريهما $٤ سم$ ، $٢ سم$ ، رسم المثلث $أ ب ج$ بحيث تقع رؤوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى في $س$ ، $ص$ ، $ع$.
أثبت أن: المثلث $أ ب ج$ متساوي الأضلاع وأوجد مساحته.

٩ في الشكل المقابل:

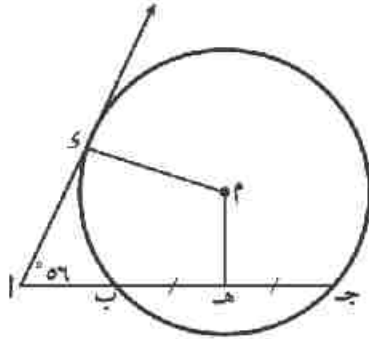


$أ ب ج$ مثلث فيه $أ ب = أ ج$ ، رسمت دائرة م قطرها $ب ج$ قطعت $أ ب$ في د، $أ ج$ في هـ، $م س \perp ب د$ ، $م ص \perp ج هـ$.
أثبت أن: $ب د = ج هـ$.

اختبار الوحدة الرابعة

١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

- أ) أي ثلاث نقاط لا تنتمي لمستقيم واحد تمر بها
- ب) محور تماثل الدائرتين م، ن المتقاطعتين في أ، ب هو
- ج) إذا كان $أ ب = ٧$ سم فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ، ب = سم^٢.
- د) إذا كانت م دائرة محيطها ٨π سم، النقطة على الدائرة، فإن $م أ =$
- هـ) وتر طوله ٨ سم في دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها سم.



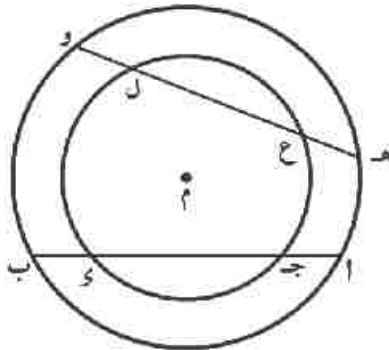
٢ في الشكل المقابل:

- أ) مماس للدائرة م، أ ج يقطع الدائرة م في ب، ج، هـ منتصف ب ج، ق، $(أ \Delta) = ٥٦^\circ$.
- أوجد $(أ \Delta م هـ)$.

٣ في الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م، أب وتر في الدائرة الكبرى، ويقطع الصغرى في ج، ك، هـ وتر في الدائرة الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى في ع، ل حيث $أ ب = هـ و$.

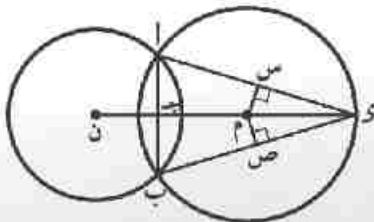
- أثبت أن: أ) $ج ك = ع ل$
- ب) $أ ك = ع و$



٤ في الشكل المقابل:

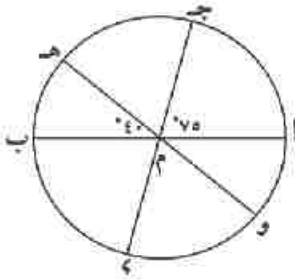
الدائرة م \cap الدائرة ن = {أ، ب}، $أ ب \cap$ م ن = {ج}، $ك \exists$ م ن، م س \perp أ ك، م ص \perp ب ك.

أثبت أن: م س = م ص.



تمارين (٥ - ١)

على الزاوية المركزية وقياس الأقواس



١ في الشكل المقابل:

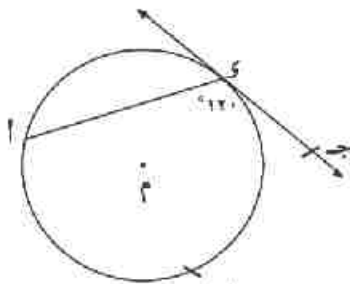
أ ب ، ج د ، هـ و أقطار في الدائرة م أكمل:

⊠ أ و (أ ج) = ⊠ ب و (أ ج هـ) =

⊠ ج و (أ ج د) = ⊠ د و (أ و هـ) =

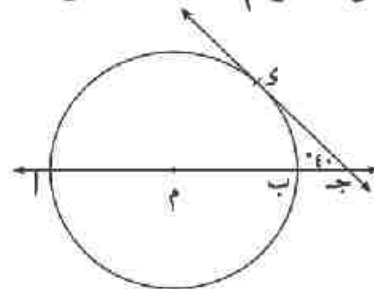
٢ في كلٍّ من الأشكال الآتية:

ج د مماس للدائرة م عند د ، أكمل:



⊠ أ و (أ ب د) =

⊠ ب



⊠ أ و (أ ب) = ⊠ ب و (أ د) =

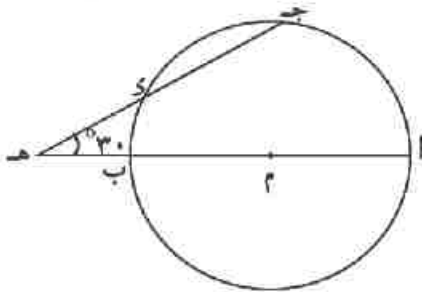
⊠ ا

٣ في الشكل المقابل:

أ ب قطر في الدائرة م ، أ ب ∩ ج د = هـ .

⊠ (أ هـ ج) = 30° ، ⊠ (أ ج هـ) = 80° .

أوجد ⊠ (ج د)



٤ في الشكل المقابل:

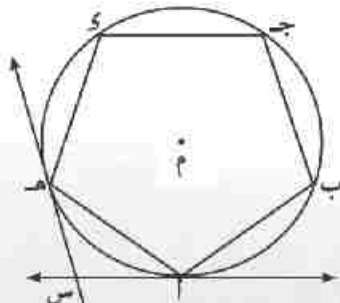
أ ب ج د هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م ،

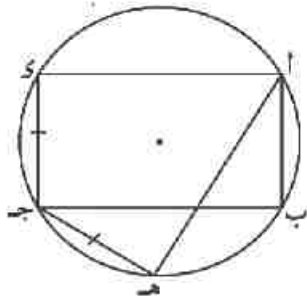
أ س مماس للدائرة عند أ ، هـ س مماس للدائرة عند هـ

حيث أ س ∩ هـ س = س .

أوجد: ⊠ أ و (أ هـ)

⊠ ب و (أ س هـ) .

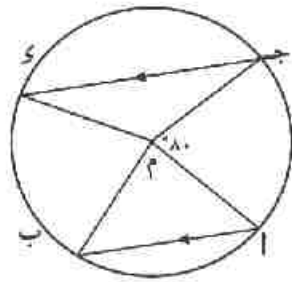




٥ في الشكل المقابل:

أ ب ج د مستطيل مرسوم داخل دائرة، رسم الوتر ج هـ
بحيث ج هـ = ج د .
أثبت أن: أ هـ = ب ج .

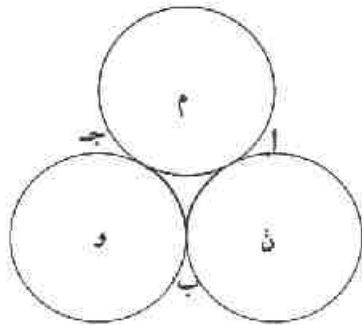
٦ في الشكل المقابل:



م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم، أ ب، ج د وتران متوازيان في
الدائرة، و (أ ج) = ٨٠°، طول أ ج = طول أ ب.
أوجد:

١) و (أ م أ ب) ٢) و (ج د) ٣) طول ج د

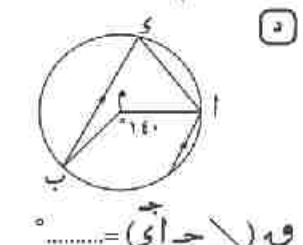
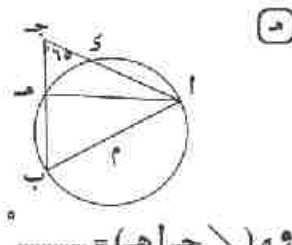
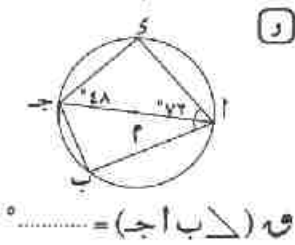
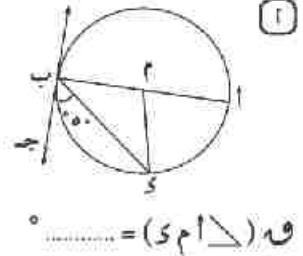
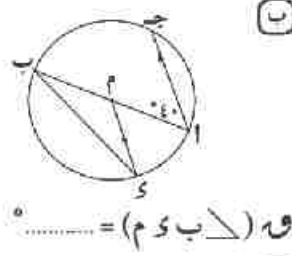
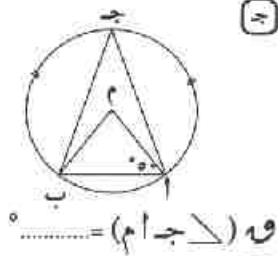
٧ في الشكل المقابل:



م، ن، و ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة في أ، ب، ج،
طول نصف قطر كل منها ١٠ سم .
١) أثبت أن: طول أ ب = طول ب ج = طول أ ج .
٢) محيط الشكل أ ب ج د .

على العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين في القوس

١ في كلٍّ من الأشكال التالية، م دائرة، ادرس الشكل ثم أكمل:



٢ في الشكل المقابل:

أ ب وتر في الدائرة م، ج م // أ ب ، ب ج ∩ أ م = {هـ}،
أثبت أن: ب هـ < أ هـ

٣ في الشكل المقابل:

أ ب ، ج د وتران في الدائرة، أ ب ∩ ج د = {هـ}،
وه (Δ ي هـ ب) = ١١٠°، وه (أ ج) = ١٠٠°.

أوجد: وه (Δ ي ج ب)

٤ في الشكل المقابل:

ج ب ∩ هـ د = {أ}، ب هـ ∩ ج د = {و}، فإذا كان:
وه (Δ ا) = ٣٠°، وه (ب ي) = ٤٤°، وه (Δ ي ج هـ) = ٤٨°

أوجد: أ) وه (ج هـ) ب) وه (ب ج)

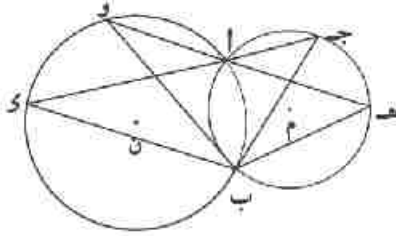
٥ أ ب ، أ ج وتران في دائرة، س، ص منتصفاً أ ب، أ ج على الترتيب، رسمت س ص فقطعت

أ ب في ي ، أ ج في هـ
أثبت أن: أ ي = أ هـ

على الزاوية المحيطية المرسومة
على نفس القوس

أولاً :

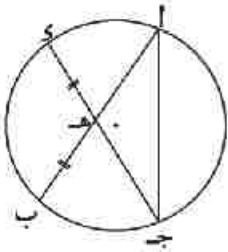
١ في الشكل المقابل :



م، ن دائرتان متقاطعتان في أ، ب، $\overleftrightarrow{أج}$ يقطع الدائرة م في ج
ويقطع الدائرة ن في د، $\overleftrightarrow{أه}$ يقطع الدائرة م في هـ، ويقطع
الدائرة ن في و.

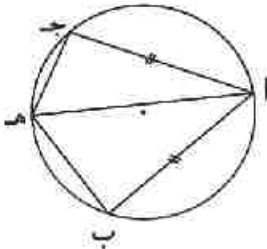
أثبت أن : $\angle هـ ب ج = \angle و ب د$

٢ في الشكل المقابل :



أ، ب وتران متساويان في الطول في الدائرة، $\overline{أب} \cap \overline{ج د} = هـ$.
أثبت أن : المثلث $\triangle أ ج هـ$ متساوي الساقين.

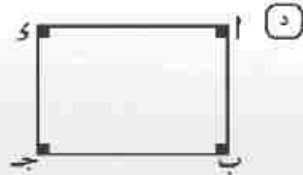
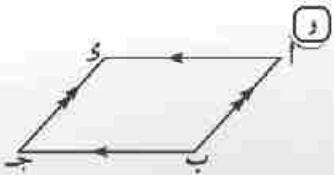
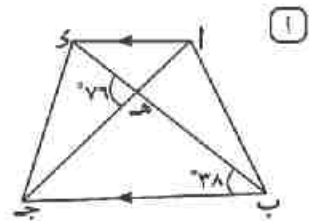
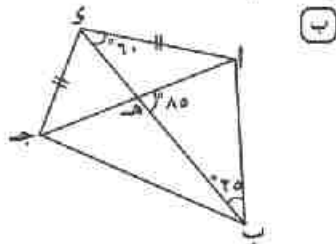
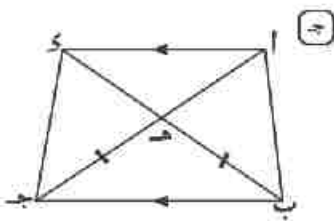
٣ في الشكل المقابل :



أ، ب = أ ج، هـ \in $\overline{أ ب ج}$

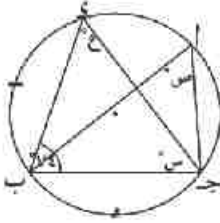
أثبت أن : $\angle أ هـ ب = \angle و هـ ج$

٤ بين في أي من الأشكال الآتية يمكن رسم دائرة تمرُّ بالنقط أ، ب، ج، د ؟ اذكر السبب.

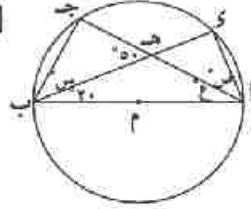


ثانياً :

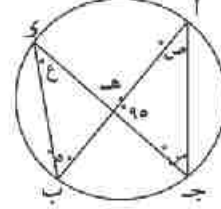
١ في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :



ج

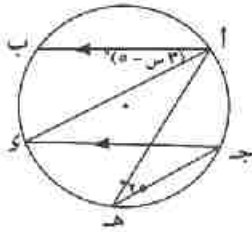


ب

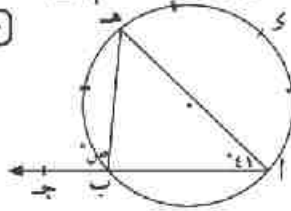


ا

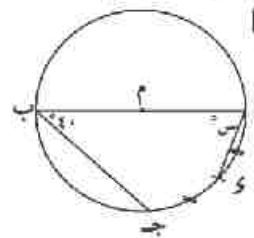
٢ في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس :



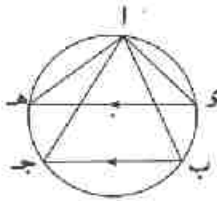
ج



ب



ا



٣ في الشكل المقابل :

أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرة، و $\overline{ي هـ} \parallel \overline{ب ج}$.

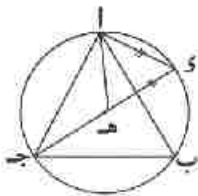
أثبت أن: $\angle و = \angle و ا ج = \angle و ا هـ$.

٤ أ ب قطر في الدائرة م، و $\angle ا ب ج = ٤٠^\circ$ ، و $\exists \overline{ب ج}$. اوجد $\angle ج ي ب$

٥ أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة،

و $\exists \overline{ا ب}$ ، و $\exists \overline{ج د}$ بحيث $ا ي = ي هـ$.

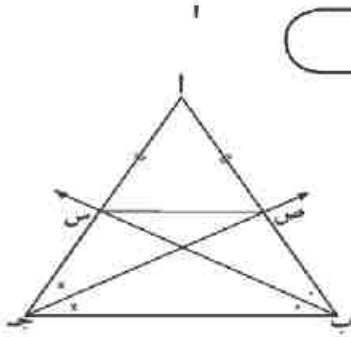
أثبت أن: المثلث ا ي هـ متساوي الأضلاع.



٦ أ ب ج مثلث متساوي الساقين فيه، $ا ب = ا ج$ ، و منتصف ب ج، رسم $\overline{ب هـ} \perp \overline{ا ج}$

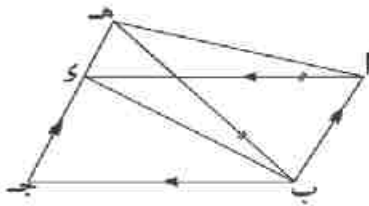
حيث $\overline{ب هـ} \cap \overline{ا ج} = هـ$. أثبت أن: النقط ا، ب، ي، هـ يمر بها دائرة واحدة.

على الشكل الرباعي الدائري



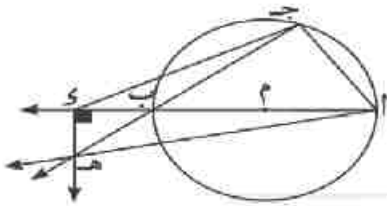
١ في الشكل المقابل :

أب جـ مثلث فيه $AB = AC$ ، $B \in S$ ينصف Δ بـ ويقطع \overline{AJ} في S ، $B \in V$ ينصف Δ جـ ويقطع \overline{AB} في V .
أثبت أن : **أولاً:** $B \in S$ رباعي دائري .
ثانياً: $S \in V // B \in J$.



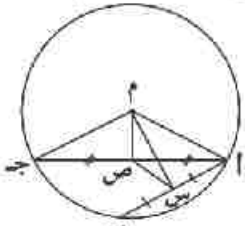
٢ في الشكل المقابل :

أب جـ Δ متوازي أضلاع، $H \in D$ جـ Δ حيث $B \in H = A$.
أثبت أن : الشكل ABH رباعي دائري .



٣ في الشكل المقابل :

أب قطر في الدائرة M ، $S \in AB$ ، $S \perp AB$ ،
رسم $S \in H \perp AB$ ، $J \in AB$ ، $B \in H$ Δ $H = (H)$.
أثبت أن : الشكل ABH رباعي دائري .



٤ في الشكل المقابل :

دائرة مركزها M ، S ، V منتصفا AB ، $A \in J$ على الترتيب .

أثبت أن : **أولاً:** الشكل ASV رباعي دائري . **ثانياً:** $V \in (AM \in J \in S)$.

ثالثاً: AM قطر في الدائرة المارة بالنقط A ، S ، V ، M .

٥ أ ب جـ Δ مربع، $S \in AV$ ينصف Δ بـ $A \in J$ ويقطع $B \in V$ في S ،
 $V \in S$ ينصف Δ جـ $B \in V$ ويقطع $A \in J$ في S .

أثبت أن : **أولاً:** الشكل ASV رباعي دائري
ثانياً: $V \in (AS \in S) = 45^\circ$

٦ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة، $S \in AB$ ، $V \in AJ$ حيث $V \in (AS) = (AS)$ ،

$J \in S \cap AB = (A)$ ، $B \in V \cap AJ = (H)$.

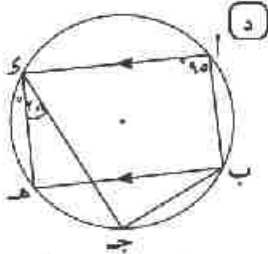
أثبت أن : **أولاً:** الشكل ABH رباعي دائري

ثانياً: $V \in (AV \in B) = (AS \in AB)$.

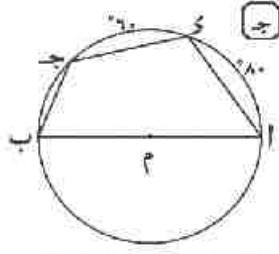
على خواص الشكل الرباعي الدائري

أولاً :

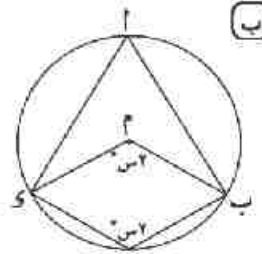
١ مستعيناً بمعطيات الشكل ، أوجد بالبرهان :



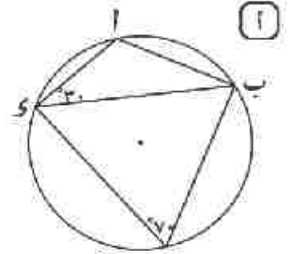
قياسات زوايا الشكل
أ ب ج د



قياسات زوايا الشكل
أ ب ج د

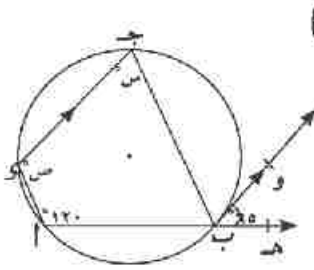


٩٠ (أ) و

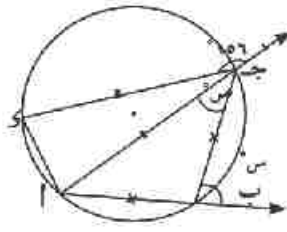


٩٠ (أ ب د) و

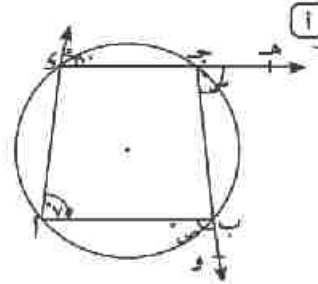
٢ في كلٍّ من الأشكال الآتية ، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .



ج

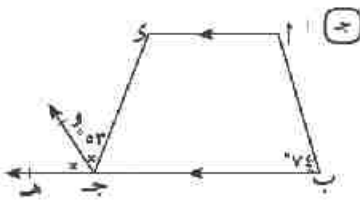


ب

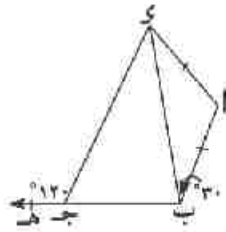


د

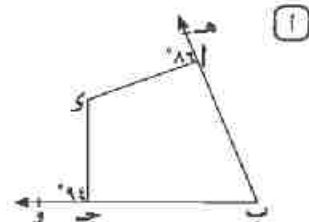
٣ أثبت أن كلاً من الأشكال الآتية رباعي دائري :



ج



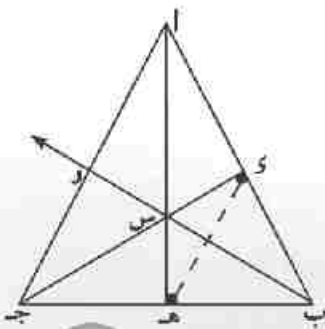
ب



د

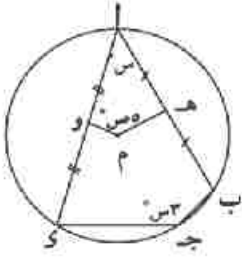
٤ في الشكل المقابل أثبت أن :

القطع المستقيمة العمودية على أضلاع المثلث من الرؤس المقابلة تتقاطع في نقطة واحدة .
ما عدد الأشكال الرباعية الدائرية في الشكل المقابل ؟
وما هي ؟

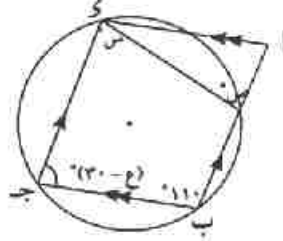


ثانياً :

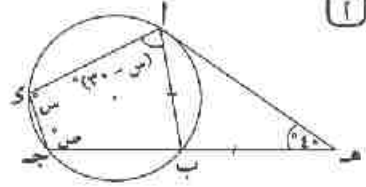
١ في كل من الأشكال الآتية : أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .



ج



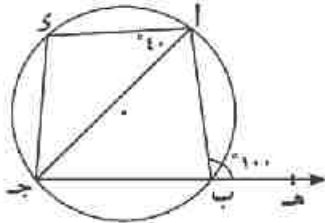
ب



ا

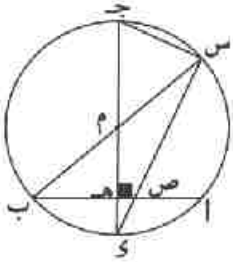
٢ في الشكل المقابل :

وه $\triangle ابه = 100^\circ$ ، وه $\triangle جاي = 40^\circ$
 أثبت أن : وه $(جى) = وه (أى)$.



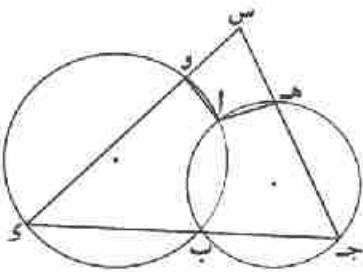
٣ في الشكل المقابل :

أب وتر في الدائرة م ، ج د قطر عمودى على أب ويقطعه في ه ،
 ب م يقطع الدائرة في س ، س د \cap أب = {ص}
 أثبت أن : **القول**: الشكل س ص ه ج رباعى دائرى .
ثانياً: وه $(د ص ب) = وه (د ب س)$



٤ في الشكل المقابل :

دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، ج د يمرُّ بالنقطة ب
 ويقطع الدائرتين في ج ، د ، ج ه \cap د و = {س} .
 أثبت أن : الشكل ا و س ه رباعى دائرى .

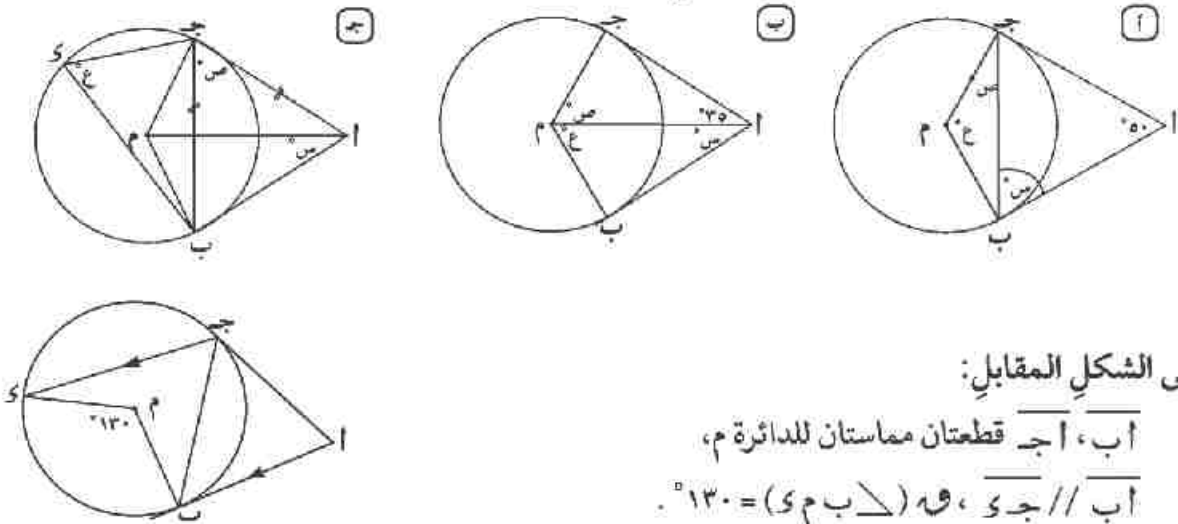


٥ اب ج مثلث مرسوم داخل دائرة فيه اب < اج ، د \exists أب بحيث اج = اد ، اه نصف \triangle
 وقطع ب ج في ه وقطع الدائرة في و .
 أثبت أن : الشكل ب و ه د رباعى دائرى .

على العلاقة بين مماسات الدائرة

أولاً:

١ في كلٍّ من الأشكال الآتية، $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان للدائرة م. أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:

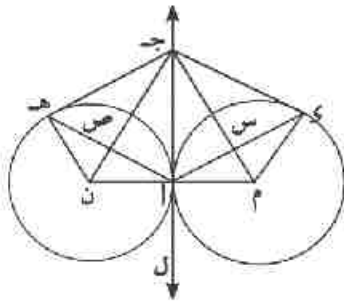


٢ في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$ قطعتان مماستان للدائرة م،
 $\overline{أب} \parallel \overline{أج}$ ، $\angle م ب ج = 130^\circ$.
 ١ أثبت أن: $\overline{أب}$ ينصف $\angle أ ج ب$.

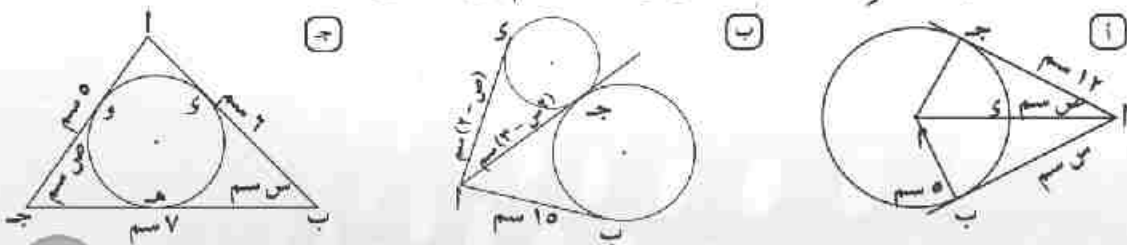
٢ أوجد $\angle أ$.

في الشكل المقابل:

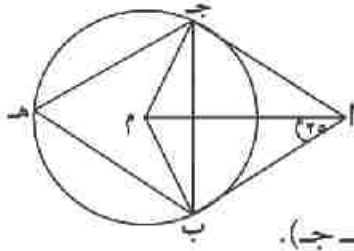


م، ن دائرتان متماستان من الخارج في أ، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ، \exists ج د ل، رسم من ج مماسان آخران للدائرتين م، ن يمسانهما في س، هـ على الترتيب، ج م \cap س = أ، ج ن \cap هـ = ص
 ١ ما عدد الأشكال الرباعية الدائرية في الشكل المقابل؟ وما هي؟
 ٢ أثبت أن: $\angle ج د أ = \angle ج أ هـ$ ، وفسر ذلك هندسياً.

٤ مستعيناً بمعطيات الشكل. أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



ثانياً :



١ في الشكل المقابل :

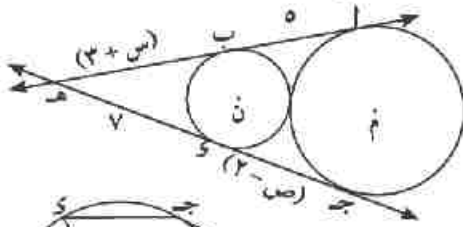
أ ب، أ ج قطعتان مماستان للدائرة م .

و (\triangle ب م) = 25° ، \exists ب ج الأكبر .

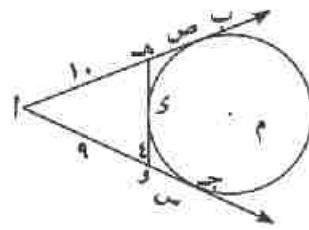
أوجد : أولاً: و (\triangle ا ج ب)

ثانياً: و (\triangle ب ه ج) .

٢ في كل من الأشكال الآتية : أوجد قيمة كل من س، ص بالستيمترات .



(ب)

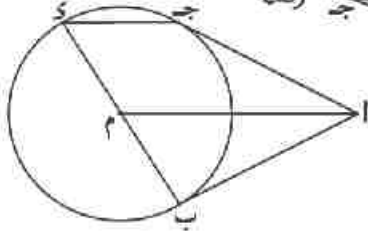


(ا)

٣ في الشكل المقابل :

أ ب، أ ج قطعتان مماستان للدائرة م .

ب و قطر في الدائرة . أثبت أن : $\overline{ام} \parallel \overline{ج د}$

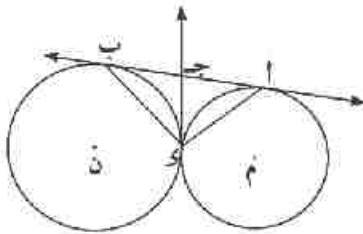


٤ م، ن دائرتان متماستان من الخارج في س، $\overline{أ ب}$ مماس مشترك لهما عند أ، ب، و ج مماس مشترك للدائرتين عند و .

حيث $\overline{و ج} \cap \overline{أ ب} = \{ج\}$.

أثبت أن : أولاً: ج منتصف $\overline{أ ب}$.

ثانياً: $\overline{أ و} \perp \overline{ب و}$.

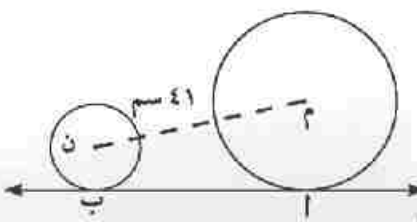


٥ أ ب قطر في الدائرة م، $\overline{أ ب} = 10$ سم، ج \exists الدائرة م، رسم مماس

للدائرة عند ج فقطع المماسين المرسومين لها عند أ، ب في س، ص على الترتيب حيث $س ص = 13$ سم

(ا) أثبت أن: $\overline{س م} \perp \overline{ص م}$

(ب) مساحة الشكل أ س ص ب .



٦ الشكل المقابل :

$\overline{أ ب}$ مماس مشترك للدائرتين م، ن من الخارج عند أ، ب

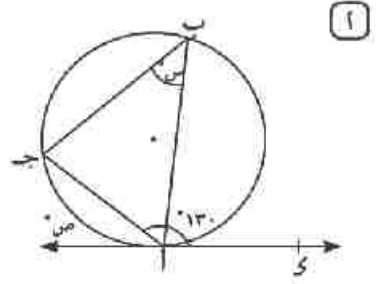
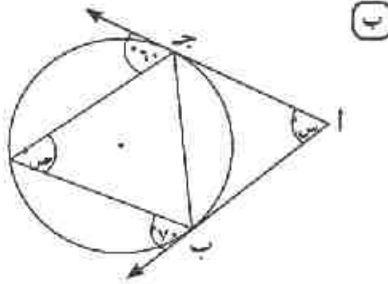
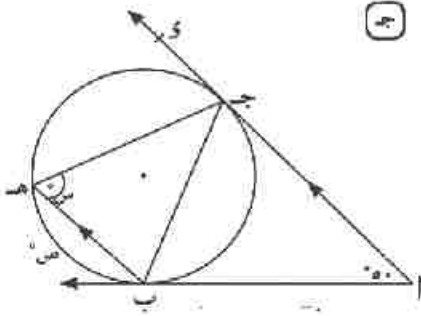
على الترتيب ، طولاً نصفى قطريهما 17 سم، 8 سم على الترتيب

وكان $م ن = 41$ سم . أوجد طول $\overline{أ ب}$

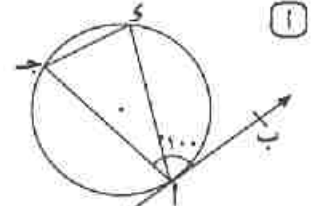
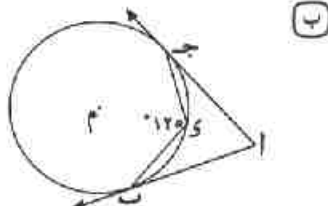
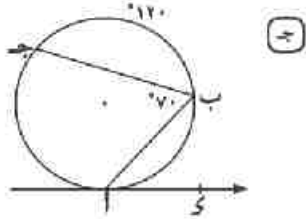
تمارين (٥ - ٧)

على الزاوية المماسية

١ مستعيناً بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس .



٢ مستعيناً بمعطيات الشكل، أوجد :

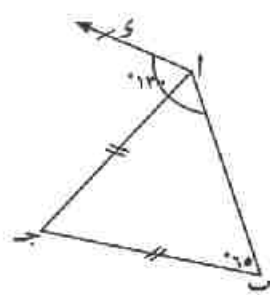
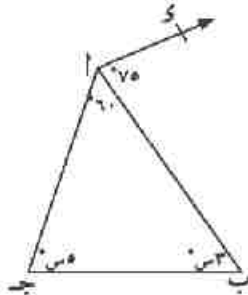
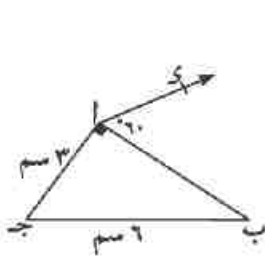


و (\angle ب ا ج) = °

و (\angle ب ا ج) = °

و (\angle ا ج ب) = °

٣ في كل من الأشكال الآتية بين أن \vec{AO} مماساً للدائرة التي تمر برؤوس \triangle ا ب ج .



٤ ا ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة، ه نقطة خارجها، ه ا $\vec{}$ ، ه ب مماسان للدائرة

عند ا، ب فإذا كان و (\angle ا ه ب) = 70°، و (\angle ا ج د) = 120°

أثبت أن : أولاً: ا ب = ا ج ثانياً: ا ج د مماس للدائرة المارة بالنقط ا، ب، ه

٥ ا ب ج د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه في ه، رسم س ص مماساً للدائرة عند ج

حيث س ص // ب د .

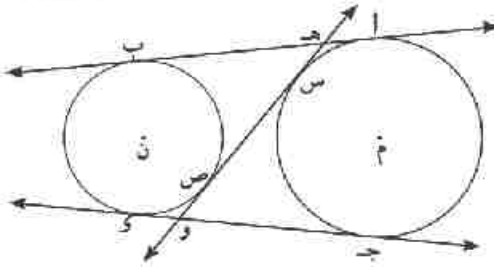
أثبت أن : أولاً: ا ج د ينصف \triangle ب ا د ثانياً: ب ج يمس الدائرة المارة برؤوس \triangle ا ب ه

٦ ا ب ج د متوازي أضلاع فيه ا ج = ب ج .

أثبت أن : ج د مماس للدائرة الخارجة للمثلث ا ب ج .



١ في الشكل المقابل:



كل نقطة في الدائرة ن تقع خارج الدائرة م.
النقطتان هـ، و هما نقطتا تقاطع أحد المماسين
المشتركين الداخليين س ص مع المماسين
المشتركين الخارجيين أب، جد على
الترتيب:

أ) ما العلاقة بين طول هـ و، طول أب؟ فسر إجابتك.

ب) ناقش: هل تتغير العلاقة بين طول هـ و، طول أب في الحالات الآتية:

أولاً: إذا كان م، ن دائرتين متطابقتين.

ثانياً: إذا كان سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = ع

٢ مسألة أبولونيوس:

في الشكل المقابل ثلاثة دوائر أطوال أقطارها غير متساوية.

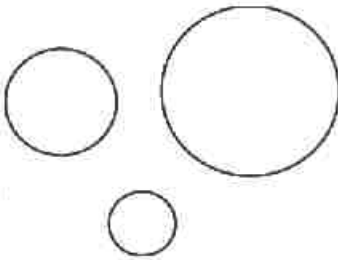
- كم دائرة يمكن رسمها لتكون مماسةً للدوائر الثلاث.

تعرف هذه المسألة بدوائر أبولونيوس وهو فلكي ومهندس

وعالم رياضيات يوناني مشهور (وُلد عام ٢٦٢ ق.م في

بيرغ وتوفي في عام ١٩٠ ق.م في الإسكندرية).

للتحقق من إجابتك يمكنك استخدام الإنترنت.

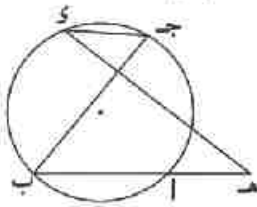


تمارين متنوعة على الوحدة الخامسة

١ \overline{AB} قطر في الدائرة م، و $(\Delta \text{ ا ج د}) = 65^\circ$ ، $\exists \overline{AB} \cap \text{ج د}$
 اوجد و $(\Delta \text{ ا ج ب})$ ، و $(\Delta \text{ ج د ب})$

٢ م ا، م ب نصفا قطرین متعامدين في الدائرة م، ا ج د، ب ي وتران متعامدان ومتقاطعان في هـ.

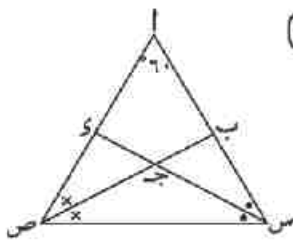
ا اوجد و $(\Delta \text{ ج د ي})$ ب أثبت أن: $\overrightarrow{اي} \parallel \overrightarrow{ب ج}$



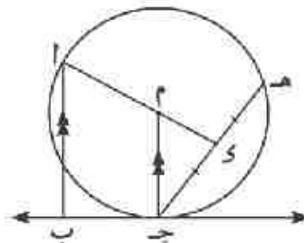
٣ في الشكل المقابل:
 هـ نقطة خارج الدائرة.

أثبت أن: و $(\Delta \text{ هـ ج د}) > (\Delta \text{ ا ب ج د})$

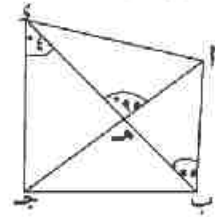
٤ في كل من الأشكال الآتية أثبت أن الشكل ا ب ج د رباعي دائري:



ا

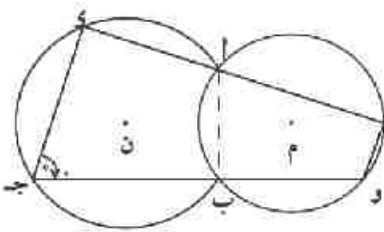


ب



ج

٥ ا ب ج د متوازي أضلاع، الدائرة المارة بالنقط ا، ب، ي تقطع ب ج في هـ
 أثبت أن: ج د = هـ ي

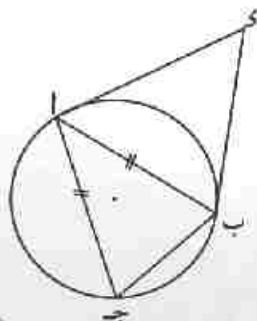


٦ م، ن دائرتان متقاطعتان في ا، ب، رسم $\overrightarrow{اي}$ يقطع الدائرة م في هـ والدائرة ن في و، رسم $\overrightarrow{ب ج}$ يقطع الدائرة م في و والدائرة ن في ج، و $(\Delta \text{ ا ج د}) = 70^\circ$.

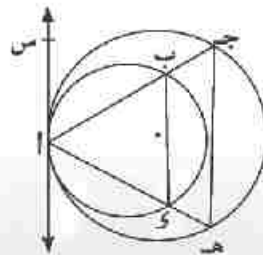
ا اوجد و $(\Delta \text{ ا ب و})$ ب أثبت أن ج د \parallel هـ و.

٧ مستعينا بمعطيات الشكل: أثبت أن:

ا ا ج د مماس للدائرة
 المارة برؤوس المثلث
 ا ب و



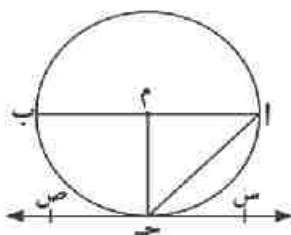
ب $\overline{ب ي} \parallel \overline{ج هـ}$



اختبار الوحدة الخامسة

١ أولاً: أكمل:

- أ) في الشكل الرباعي الدائري كلُّ زاويتين متقابلتين
 ب) مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع

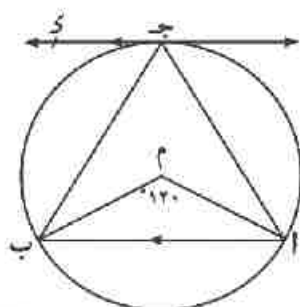


ثانياً: في الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم،
 AB قطر، س ص مماس للدائرة عند ج،
 س ص // AB .

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة: (اعتبر ط = $\frac{22}{7}$)

- ١) و (ب ج) =
 ٢) طول (أ ج) =
 ٣) مساحة المنطقة الحمراء =
- أ) ٤٥° ب) ٦٠° ج) ٩٠° د) ١٨٠°
 أ) ١١ سم ب) ٢٢ سم ج) ٣٣ سم د) ٤٤ سم
 أ) ١٥٤ سم^٢ ب) ٧٧ سم^٢ ج) ٣٨,٥ سم^٢ د) ١٤ سم^٢



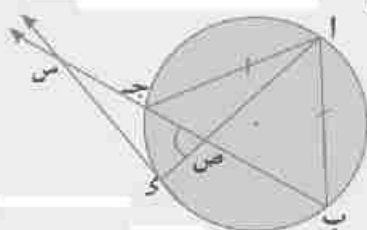
٣ في الشكل المقابل:

ج د مماس للدائرة عند ج، ج د // AB،

و (أ م ب) = ١٢٠°

اثبت أن: المثلث ج أ ب متساوي الأضلاع.

- ٤ أ ب ج مثلث مرسوم داخل دائرية فيه: AB = AC، و ي ⊃ ب ج،
 رسم ي س مماس للدائرة عند د حيث ي س ⊂ ب ج = (س)،
 اد ∩ ب ج = (ص).
 أثبت أن: س ص = س ي



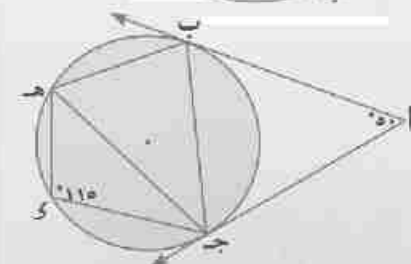
٥ في الشكل المقابل:

أ ب، أ ج قطعتان مماستان للدائرة عند ب، ج.

و (أ د) = ٥٠°، و (ج د ه) = ١١٥°

أثبت أن: أولاً: ب ج ينصف Δ أ ب ه

ثانياً: ج ب = ج ه



نماذج اختبارات الجبر والهندسة

نماذج اختبارات الجبر (النموذج الأول)

أجب عن الأسئلة الآتية: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) مجال الدالة $h(s) = \frac{s}{s-1}$ هو
 (أ) ح- {صفر} (ب) ح- {١} (ج) ح- {صفر، ١} (د) ح- {١-}

٢) عدد حلول المعادلتين: $s+v=2$ ، $s+v=3$ معا هو.....
 (أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

٣) إذا كان $s \neq$ صفر فإن $\frac{s^5}{s^2+1} \div \frac{s}{s^2+1} = \dots\dots\dots$
 (أ) ٥- (ب) ١- (ج) ١ (د) ٥

٤) إذا كانت النسبة بين محيطي مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتهما =
 (أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (ج) ٤ : ١ (د) ٤ : ٤

٥) معادلة محور تماثل منحنى الدالة d حيث $d(s) = s^2 - 4$ هي
 (أ) $s = -4$ (ب) $s =$ صفر (ج) $s =$ صفر (د) $s = 4$

٦) إذا كانت $A \supset B$ ف لتجربة عشوائية ما وكان $L(A) = 2$ $L(B) = 1$ فإن $L(A \cap B) = \dots\dots\dots$
 (أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) ١

السؤال الثاني:

أ) باستخدام القانون العام: أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية في ح.

$2s^2 - 5s + 1 =$ صفر «مقربا الناتج لرقم عشري واحد»

ب- أوجد \cup (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$\cup (س) = \frac{س-٣}{س١٢+١٢} - \frac{٤}{س١٤-٤}$$

السؤال الثالث:

أ- أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

$$س-ص=صفر \quad س١+س٢+ص١+ص٢=٢٧$$

ب- أوجد \cup (س) في أبسط صورة مبينا مجالها حيث:

$$ن (س) = \frac{س٣+س٤+س١}{س٢٧-١} \div \frac{س٣+س١}{س٩+س٣}$$

ثم أوجد \cup (٢)، \cup (٣-) إن أمكن.

السؤال الرابع:

أ) مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم أوجد مساحة المستطيل

ب) إذا كان \cup (س) = $\frac{س٢-٢}{س٣+٢}$ فأوجد:

(١) \cup (س) في أبسط صورة وعين مجالها

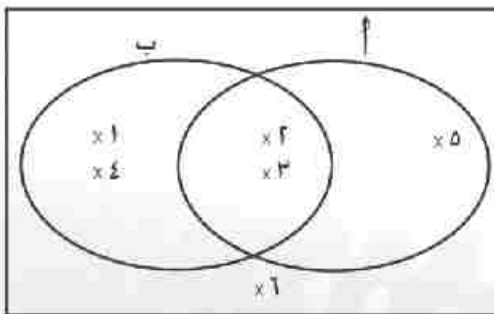
(٢) قيمة س إذا كان \cup (س) = ٣

السؤال الخامس:

أ) إذا كان \cup (س) = $\frac{س١}{س٣-١}$ ، \cup (س) = $\frac{س٢+س٣}{س١-١}$

فأثبت أن: \cup (س) = \cup (س)

ب) في الشكل المقابل:



إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة ف

لتجربة عشوائية فأوجد:

(١) \cup (أ) \cap (ب) (٢) \cup (أ-ب)

(٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

النموذج الثاني

«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابة المعطاة:

(١) مجموعة حل المعادلتين $s=3$ ، $v=4$ هي

$$[\emptyset, \text{ع} , \{(3,4)\} , \{(4,3)\}]$$

(٢) مجموعة أصفار الدالة $d(s) = s^2 + 4$ في \mathbb{C} هي

$$[\emptyset, \text{ع} , \{2, -2\} , \{2\}]$$

(٣) إذا كان A ، B حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن $P(A \cap B) = \dots$

$$[\text{صفر} , 1 , 0,5 , \emptyset]$$

(٤) مجال المعكوس الضربي للدالة $d(s) = \frac{s+2}{s-3}$ هو

$$[\{3\} , \text{ع} - \{3, -2\} , \text{ع} - \{3\}]$$

(٥) المستقيمان $s^3 + 5s = 0$ ، $s^3 - 5s = 0$ صفر يتقاطعان في

[الربع الأول ، الربع الثاني ، نقطة الأصل ، الربع الثالث] .

السؤال الثاني:

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلة $s^3 - 5s + 1 = 0$ صفر باستخدام القانون العام

مقربا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(ب) اختصر لأبسط صورة مبينا المجال

$$n(s) = \frac{s^3 + 3s}{s^2 + 2s + 4} \times \frac{s^3 - 8}{s^2 + 6s + 6}$$

السؤال الثالث:

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معا:

$$س - ص = ١ ، س + ص = ٢٥$$

(ب) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية

وكان $P(A) = ٠,٣$ ، $P(B) = ٠,٦$ ، $P(A \cap B) = ٠,٢$

أوجد $P(A|B)$ ، $P(B|A)$

السؤال الرابع:

(أ) حل المعادلتين في $E \times E$

$$٢س - ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤$$

(ب) أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٩} \div \frac{س^٢}{س + ٣}$$

السؤال الخامس:

(أ) أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينا مجالها

$$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤} + \frac{س + ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$$

(ب) ارسم الشكل البياني للدالة $د(س) = س - ١$ في الفترة $[-٣, ٣]$

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $س - ١ = صفر$

نموذج اختبار للطلاب المدمجين

«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»

السؤال الأول: أكمل ما يأتي:

- (١) احتمال الحدث المستحيل =
- (٢) أبسط صورة للكسر الجبري $\frac{س-٢}{س٢+٦}$ هي.....
- (٣) إذا كانت $A \supset B$ ف لتجربة عشوائية وما كان ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ فإن ل (أ) =
- (٤) المعادلة $س٣ - س - ١ = ٠$ صغر من الدرجة.....
- (٥) نقطة تقاطع المستقيمين $س = ١$ ، $ص = ١$ تقع في الربع.....
- (٦) مجموعة أصفار الدالة $د$ حيث $د(س) = س - ٥$ هي.....

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- (١) مجموعة حل المعادلتين $س = ٢$ ، $ص = ٦$ هي.....
 - (أ) $\{(٢,٢)\}$
 - (ب) $\{٣,٢\}$
 - (ج) $\{(٢,٣)\}$
 - (د) $\{٣\}$
- (٢) يكون للدالة $د$ حيث $د(س) = \frac{س-٢}{س-٥}$ معكوسا جمعيا في المجال....
 - (أ) ح- $\{٢\}$
 - (ب) ح- $\{٥\}$
 - (ج) ح- $\{٥,٢\}$
 - (د) ح- $\{٥,٢\}$
- (٣) المعكوس الضربي للكسر الجبري $\frac{٣}{س٢+١}$ هو.....
 - (أ) $\frac{٣-}{س٢+١}$
 - (ب) $\frac{س٢+١}{٣-}$
 - (ج) $\frac{س٢+١}{٣}$
 - (د) $\frac{س٢-١}{٣}$
- (٤) مجال الدالة $د$ حيث $د(س) = \frac{س+٢}{س-١}$ هو
 - (أ) ح- $\{٢-\}$
 - (ب) ح- $\{١\}$
 - (ج) ح- $\{٢,١\}$
 - (د) ح- $\{٢\}$
- (٥) إذا كان $ص = ٢$ ، $س = ٢$ ، $ص = ٥$ فإن $س =$
 - (أ) $٣-$
 - (ب) ٣
 - (ج) $٣ \pm$
 - (د) ٩
- (٦) المستقيمان $س + ٢ = ١$ ، $س + ٤ = ٦$ يكونا.....
 - (أ) متوازيان
 - (ب) متقاطعان
 - (ج) متعامدان
 - (د) منطبقان

السؤال الثالث: ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (×) أمام العبارة الخاطئة

(١) في المعادلة $٢س - ٥ = ٤ - صفر$

() أ = ١ ، ب = -٥ ، ج = ٤

(٢) أبسط صورة للدالة ن (س)

() ن (س) = $\frac{١}{١+س} + \frac{س}{١+س}$ هي $١+س$

() (٣) $\frac{١}{٥} = \frac{١+س}{١-س} \times \frac{١-س}{٥}$

، س $\neq \pm ١$

(٤) إذا كان عدداً مجموعهما ٣، مجموع مربعيهما ٥،

() فإن العددين هما ١، ٢

(٥) إذا كان أ، ب حدثين متنافيتين من فضاء العينة

فإن $١ = (أ \cap ب)$

(٦) إذا كان احتمال فوز إحدى الفرق = ٠,٧،

() فإن احتمال عدم فوزه هو ٠,٣

س ٤: صل من العمود أ بما يناسبه من العمود ب

(ب)

• $\{(1, 2)\}$

• $\frac{s}{s^2+4}$

• $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

• ح - $\{1, -1\}$

• $\frac{1}{3}$

• $\{0\}$

(أ)

(١) مجموعة حل المعادلتين $s = 2$ ، $s = 1 - 0$

• هي =

(٢) مجموعة حل المعادلة $s^2 + 2s + 3 = \dots$

• هي $s = \dots$ حيث $a \neq 0$ ، b ، $c \in \mathbb{R}$

(٣) إذا كان $s = (s)$ فإن $\frac{s-1}{s+1}$

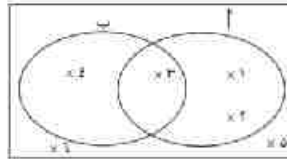
• مجال s^{-1} (س) هو =

(٤) إذا كان $s = n$ ، n كان

• $n = \frac{s^5}{s^2+20} = \dots$ فإن $s = \dots$

(٥) مجموعة أصفار الدالة $d(s) = \frac{s-5}{s}$

• هي



(٦) في الشكل المقابل

• $n(A - B) = \dots$

نماذج اختبارات الهندسة

النموذج الأول

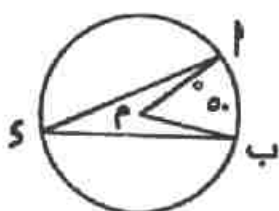
أجب عن الأسئلة الآتية: «يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»
السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة

(أ) حادة (ب) منفرجة (ج) مستقيمة (د) قائمة

٢) في الشكل المقابل: دائرة مركزها م.

إذا كانت $\angle (أ ب) = 50^\circ$ فإن $\angle (أ ب) = \dots^\circ$:



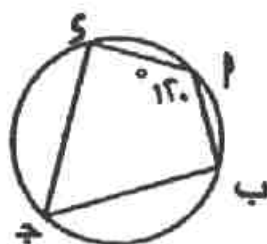
(أ) 25 (ب) 50 (ج) 100 (د) 150

٣) عدد محاور التماثل لدى دائرة هو

(أ) صفر (ب) 1 (ج) 2 (د) عدد لا نهائي

٤) في الشكل المقابل:

إذا كان $\angle (أ) = 120^\circ$ فإن $\angle (ج) = \dots^\circ$:



(أ) 60 (ب) 90 (ج) 120 (د) 180

٥) إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التي قطرها ٨ سم

فإنه يبعد عن مركزها بمقدار يساوي ... سم

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

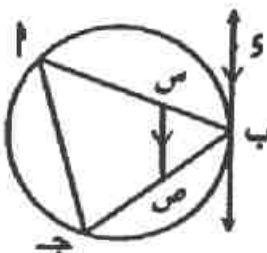
٦) سطح الدائرة م \cap سطح الدائرة ن = {أ} وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم،

م ن = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = سم

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 11 (د) 16

السؤال الثاني:

أ) أكمل مع البرهان: إذا كان الشكل الرباعي دائرياً فإن كل زاويتين متقابلتين



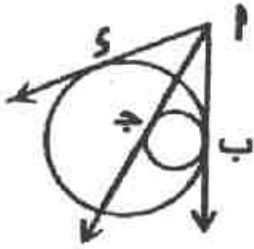
ب) في الشكل المقابل أ ب ج د مثلث مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{ب ك}$ مماس للدائرة عند ب، $س \perp \overleftrightarrow{أ ب}$

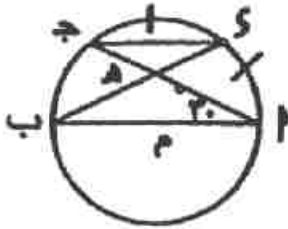
$ص \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ حيث $س ص \parallel \overleftrightarrow{ب ك}$

أثبت أن: الشكل أ س ص ج رباعي دائري.

السؤال الثالث:

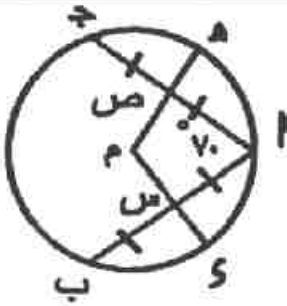


(أ) في الشكل المقابل: دائرتان متماستان في نقطة ب،
 أب مماس مشترك للدائرتين، أ ج مماس للصغرى،
 أو مماس للكبرى، أ ج = ١٥ سم، أب = (٢ - س - ٣) سم
 أ س = (ص - ٢) سم أوجد كلا من: س، ص

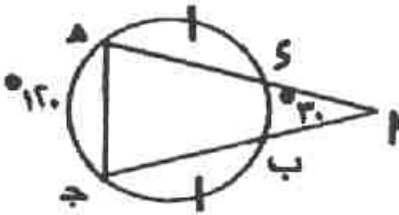


(ب) في الشكل المقابل: أب قطر في دائرة م، ج د ⊃ للدائرة.
 و (Δ ج أ ب) = ٣٠°، ك منتصف أ ج،
 ك ب ∩ أ ج = {هـ}
 (١) أوجد: ق (Δ ب ك ج)، و (أ ك)
 (٢) أثبت أن: أب // ج ك

السؤال الرابع:

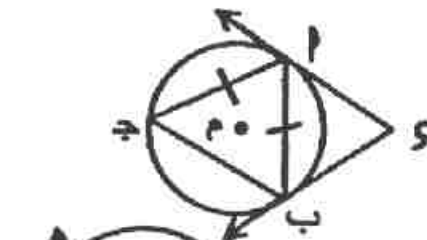


(أ) في الشكل المقابل:
 أب، أ ج وتران متساويان في الطول في الدائرة م
 س منتصف أب، ص منتصف أ ج، ق (Δ ج أ ب) = ٧٠°
 (١) أوجد ق (Δ ك م هـ) (٢) أثبت أن س ك = ص هـ



(ب) في الشكل المقابل: ق (Δ أ) = ٣٠°
 ق (هـ ج) = ١٢٠°، ق (ب ج) = ق (ك هـ)
 (١) أوجد ق (ب ك) الأصغر
 (٢) أثبت أن: أب = أ ك

السؤال الخامس:



(أ) في الشكل المقابل:
 أ، ك ب مماسان للدائرة م، أب = أ ج
 أثبت أن: أ ج مماس للدائرة المارة بـ ع و س المثلث أ ب ك
 (ب) في الشكل المقابل: ج منتصف أب



م ج ∩ الدائرة م = {ك}، و (Δ م أ ب) = ٢٠°
 أوجد: و (Δ ب هـ ك)، و (أ ك ب)

النموذج الثاني

أجب عن جميع الأسئلة التالية: «يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) قياس القوس الذي يمثل نصف قياس الدائرة =

(٣٦٠ ، ١٨٠ ، ١٢٠ ، ٩٠)

(٢) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستان من الخارج =

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

(٣) قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة -

(٤٥ ، ٩٠ ، ١٢٠ ، ١٨٠)

(٤) الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين....

(وتران ، مماسان ، وترومماس ، وتروقطر)

(٥) أ ب ج د شكل رباعي دائري فيه ق (أ د) = ٦٠° فإن ق (ج د) =

(٦٠ ، ٣٠ ، ٩٠ ، ١٢٠)

(٦) دائرتان م، ن متماستان من الداخل أنصاف أقطارهم ٥ سم، ٩ سم فإن م ن = سم

(١٤ ، ٤ ، ٥ ، ٩)

السؤال الثاني:

(أ) في الشكل المقابل:

أ ب = أ ج ، م ن ⊥ أ ب ، م ه ⊥ أ ج

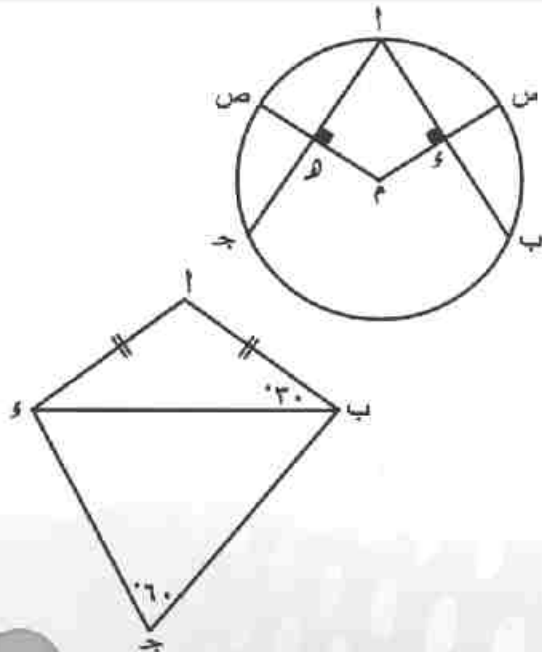
أثبت أن س ر = ص ه

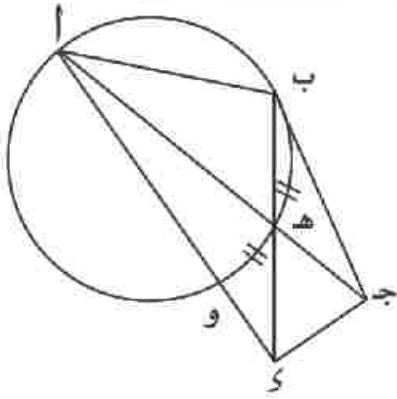
(ب) أ ب ج د شكل رباعي فيه

أ ب = أ ر ، ق (أ ب ر) = ٣٠°

ق (ج د) = ٦٠°

أثبت أن الشكل أ ب ج د رباعي دائري





السؤال الثالث:

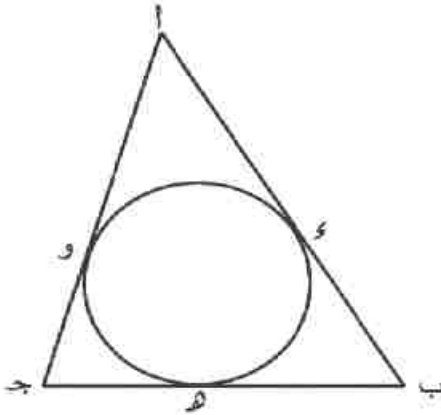
(أ) اذكر حالتين يكون فيهما الشكل الرباعي دائرياً؟

(ب) في الشكل المقابل:

ب ج مماس للدائرة عند ب

هـ منتصف القوس $\widehat{ب و}$

أثبت أن أ ب ج د رباعي دائري.



السؤال الرابع:

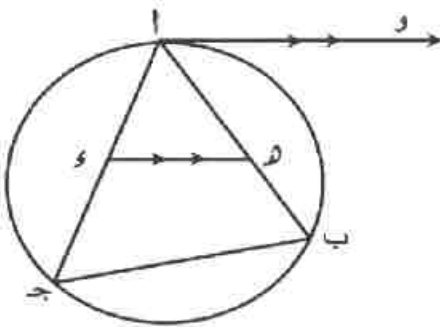
(أ) في الشكل المقابل:

المثلث أ ب ج مرسوم خارج الدائرة م تمس أضلاعه

أ ب، ب ج، أ ج في د، هـ، و على الترتيب

أ د = هـ سم، ب هـ = د سم، ج و = و سم

أوجد محيط المثلث أ ب ج



(ب) في الشكل المقابل:

أو مماس للدائرة عند أ، أو $\overline{د هـ} \parallel \overline{د هـ}$

برهن أن د هـ ب ج شكل رباعي دائري

السؤال الخامس:

في الشكل المقابل:

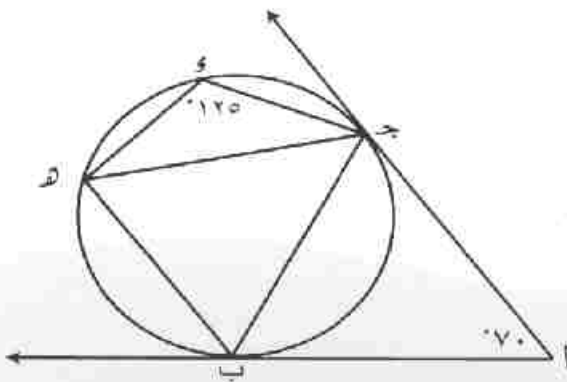
أ ب، أ ج مماس للدائرة عند ب، ج

ق (\angle) = 70°، ق (\angle ج د هـ) = 120°

أثبت أن

ج ب = ج هـ

أ ج // ب هـ



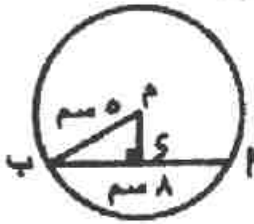
نموذج طلاب الدمج

«يسمح باستخدام الآلة الحاسبة»

أجب عن الأسئلة الآتية في نفس الورقة

السؤال الأول: أكمل العبارات الآتية:

- (١) أكبر الأوتار طولاً في الدائرة يسمى ...
- (٢) المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أي وتر فيها يكون
- (٣) القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة..... في الطول
- (٤) في الشكل المقابل:



طول $\overline{CD} = \dots$ سم

(٥) يوجد للدائرة عدد من محاور التماثل

(٦) إذا كان $\widehat{A} = 60^\circ$ فإن ق (أ ج) =

السؤال الثاني: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كانت النقطة أ \in للدائرة م التي قطرها ٦ سم، فإن م أ = سم

(٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣)

(٢) في الشكل المقابل: ق (\sphericalangle أ ج ب) =

(١٨٠ ، ٩٠ ، ٨٠ ، ٤٠)

(٣) عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو

(٤ ، ٣ ، ٢ ، ١)

(٤) في الشكل المقابل:

طول $\overline{AB} = \dots$ سم

(٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣)

(٥) عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر بطرفي القطعة

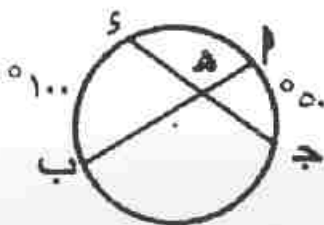
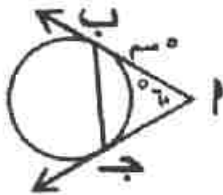
المستقيمة \overline{AB} يساوي...

(١ ، ٢ ، ٣ ، عدد لا نهائي)

(٦) في الشكل المقابل:

ق (\sphericalangle أ ه ج) =

(١٠٠ ، ٧٥ ، ٥٠ ، ٢٥)

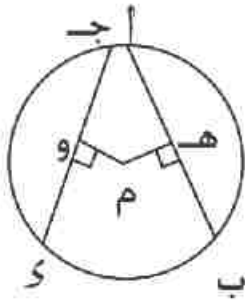


السؤال الثالث،

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخاطئة.

(١) م، ن دائرتان متماستان من الخارج

أطوال أنصاف قطريهما بالترتيب نق = ٥ سم، نق = ٣ سم فإن م ن = ١٥ سم ()



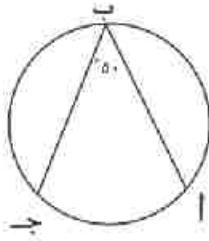
(٢) أ ب = ج د

فإذا كان م ه = ٣ سم

فإن م و = ٣ سم ()

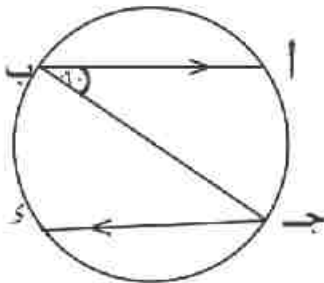
(٣) الشكل أ ب ج د يكون رباعيا دائريا إذا كان

$$\text{ق} (\angle \text{أ}) + \text{ق} (\angle \text{ج}) = 90^\circ \quad ()$$



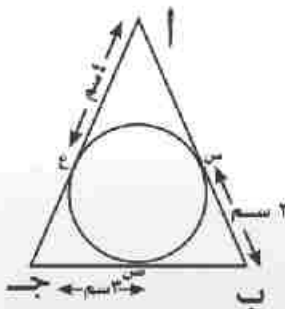
(٤) في الشكل المقابل:

$$\text{ق} (\angle \text{أ ج}) = 100^\circ \quad ()$$



(٥) في الشكل المقابل:

$$\text{ق} (\angle \text{أ ب}) + \text{ق} (\angle \text{ج د}) = 300^\circ \quad ()$$



(٦) في الشكل المقابل:

محيط \triangle أ ب ج = ٩ سم ()

السؤال الرابع:

صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب)

(ب)

(أ)

١٣٠ •

٩٠ •

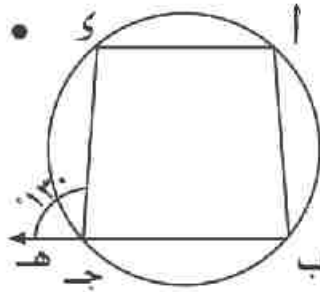
٣٠ •

٥ •

٤٠ •

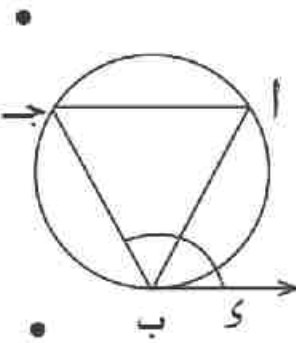
١:٢ •

١) قياس الزاوية المحيطية المرسوم في نصف دائرة =



٢) في الشكل المقابل

ق (\triangle) =



٣) في الشكل المقابل

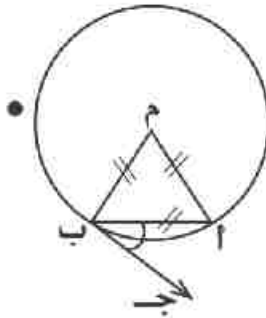
ب و مماس للدائرة عند ب

ق (\triangle و ب ج) = ١٤٠° فإن ق (\triangle أ) = ..

٤) طول نصف قطر الدائرة

المارة برعوس مثلث قائم الزاوية

طول وتره ١٠ سم يساوي = سم



٥) في الشكل المقابل:

\triangle م أ ب متساوي الأضلاع

ب ج مماس للدائرة عند ب

فإن ق (\triangle أ ب ج) =

٦) النسبة بين قياس الزاوية المركزية والمحيطية المشتركتان في

نفس القوس في دائرة واحدة هي

المواصفات الفنية

٢٤٩/١٠/٤/٢٢/٢/٢٠	رقم الكتاب :
$\frac{1}{8}$ (٨٢×٥٧) سم	مقاس الكتاب:
٤ لون + ١ لون	طبع المتن:
٤ لون	طبع الغلاف:
٧٠ جم أبيض	ورق المتن:
١٨٠ جم كوشيه	ورق الغلاف:
١٦٤ صفحة	عدد الصفحات بالغلاف:

<http://elearning.moe.gov.eg>

الأشرف برنتنج هاوس